Science de l'Univers TOTAL ou Science de l'ETRE
http://hubertelie.com
fr.science-total-universe.org

Théorie des ensembles

Théorie des univers

L'ancêtre de la Théorie universelle des ensembles, la Science de l'Univers TOTAL

Hubert ABLI-BOUYO

Sommaire :

Introduction

Ce document présente la Théorie des Univers, l'ancêtre de la Théorie universelle des ensembles, le nom technique de la Science de l'Univers TOTAL. Même si vous n'êtes pas spécialiste de la théorie des ensembles, des mathématiques ou des sciences, vous trouverez un très grand intérêt à lire ce document pour plusieurs raisons.

D'abord cette introduction, facile à comprendre pour tous, explique l'histoire et l'évolution de ce qu'est aujourd'hui la Science de l'Univers TOTAL. Cette introduction permettra de comprendre la racine et l'esprit de cette science, sa raison d'être, à quels problèmes elle constitue la solution, bref quel est vraiment le fond du problème scientifique. C'est ici que je peux expliquer certaines choses que vous voulez peut-être savoir à propos de cette science, car elles sont ici dans leur contexte. Ailleurs on ne les comprendrait pas aussi bien. C'est l'occasion aussi de voir à quoi ressemble une théorie axiomatique des ensembles (une théorie selon les paradigmes actuels), et donc cela permet de voir en quoi la Science de l'Univers TOTAL (la Théorie universelle des ensembles donc) constitue un changement radical, et pourquoi. Vous allez pouvoir découvrir les notions techniques qui se cachent derrière les textes de la Science de l'Univers TOTAL, et si vous n'êtes pas un initié des choses techniques, vous ne pourrez que mieux appréciez la manière dont les choses sont dites maintenant, oui vous apprécierez le changement de paradigme !

Et d'ailleurs cette différence vous frappera quand vous passerez des parties A et B à la partie C. Vous verrez et vivrez ce changement de paradigme, vous apprécierez la **très grande simplification** des mathématiques et des sciences que c'est de passer de la Théorie des Univers à la Théorie universelle des ensembles. Dans la partie C, on parlera de la nouvelle théorie des nombres (les nombres cycliques), de la nouvelle logique, la **Logique Alternative** (fonctionnant avec l'**Alternation**) qui est pour le courant alternatif ce que l'actuelle **Logique Négative** (fonctionnant avec la **Négation**) est pour le courant continu. On parlera de physique et d'informatique, vous aurez un aperçu de l'Informatique de l'Univers TOTAL et son impact sur la physique entre autres. Vous verrez la différence entre l'actuelle **Axiomatique** et la nouvelle **Théorématique**, la méthodologie de la Théorie universelle des ensembles. Nous passerons des douleurs et des affres de la pratique mathématique et scientifique actuelle (paradigmes dans lesquels la Théorie des Univers a été élaborée) à la **simplification** et au très **grand confort** qu'est le fait de travailler désormais dans le cadre de l'**Univers TOTAL**, l'**Ensemble de toutes les choses**, l'**Ensemble de tous les ensembles**.

Jamais science n'aura été aussi simple, aussi éclairante et aussi agréable à faire que dans le cadre de l'Univers TOTAL, son paradigme naturel qu'elle aura retrouvé. Le but de ce document est aussi de vous faire sentir ce passage de l'ancien au nouveau. Vous vivrez les douleurs de l'accouchement de la Théorie des Univers (avec ses formules dans la pure tradition actuelle, rébarbatives pour les non initiés…) puis la grande délivrance avec la Théorie universelle des ensembles, la Science de l'Univers TOTAL… Là c'est la Science dans le Calme, la Simplicité, la Paix et la Sérénité. Il n'y a plus de formules effrayantes, il y a infiniment moins de signes cabalistiques incompréhensibles pour le profane et qui lui donneraient des migraines... Il n'y a désormais que des symboles très familiers (addition, soustraction, multiplication, division, signe de l'égalité, etc., ainsi que les symboles des nombres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, …), que tout le monde ou presque connaît. Bref, c'est un autre monde qui commence…

Ne manquez donc pas cette partie finale, là où tout s'éclaire. Vous pouvez donc juste survoler les développements techniques des parties A et B si c'est du « chinois » pour vous ou simplement si votre intention dans un premier temps n'est pas d'entrer dans les considérations techniques, mais de juste vous en faire une bonne idée.

Lisez donc cette partie en diagonale, sauf si les détails techniques de la théorie des ensembles (telle qu'on la fait actuellement) vous intéressent. Car le but n'est pas non plus de vous faire étudier la Théorie des Univers, mais simplement de vous faire voir **autrement** une théorie axiomatique des ensembles, comment ça marche, qu'est-ce que cela permet de faire, quels sont ses concepts fondamentaux, qu'il faut connaître quand-même (relations, égalité, appartenance, réunion, intersection, ordinaux, etc.), quels sont les problématiques, comment elles sont résolues dans la Théorie des Univers, etc. Si vous savez bien utiliser cette partie technique (même si vous ne rentrez pas dans les détails et les démonstrations), elle vous apprendra beaucoup de choses importantes et intéressantes d'ordre général sur les ensembles, leur logique et leur fonctionnement. Vous verrez dans les parties A et B les ensembles abstraits tels que les « matheux » les conçoivent et les utilisent, qui ne vous apprennent pas grand-chose sur l'**Univers**, sur la **vie**, sur **vous**. Et vous verrez dans la partie C la **bonne conception des ensembles**, la **notion universelle d'ensemble** (c'est ce que veut dire **Théorie universelle des ensembles**), la notion **naturelle**, celle qui **nous apprend tout sur l'Univers**, sur **nous** et sur la **vie** (car n'oublions pas que **nous sommes des ensembles**, donc c'est de **nous** et des choses qui nous entourent qu'il est question !)

Quand les choses **mathématiques abstraites** vous sont expliquées par un **physicien** et pas n'importe lequel, mais un physicien bien dans l'**Univers** (l'**Univers TOTAL**, la **Réalité TOTALE** !), oui un physicien qui s'y connaît en matière d'**Ensemble de toutes les choses** et qui sait de quoi il parle, on ne loupe pas cette magnifique occasion de **comprendre enfin l'Univers et les choses**, de comprendre ce qui se cache vraiment derrière les concepts mathématiques, leur **SENS** !

Je sais, il y a la « difficile » partie A et B à passer, là j'étais plus « matheux » que physicien, je l'avoue, mea culpa… Mais, courage… ça ira infiniment mieux avec la partie C, là où le physicien laisse tomber toute l'**abstraction** de l'**Axiomatique** pour reprendre tous ses esprits avec la très **concrète Théorématique**…

Je suis donc fondamentalement physicien, je faisais des recherches en relativité et en mécanique quantique, je m'attaquais spécialement à l'étude des paradoxes de la relativité et de la physique quantique, qui selon moi indiquaient que quelque chose ne tournait pas bien rond dans les fondements de la physique. Ces recherches et ces enquêtes m'ont très rapidement conduit à m'intéresser de plus près à tous les outils et les concepts mathématiques qui servent aux physiciens, et plus spécialement aux outils algébriques et géométriques (espaces vectoriels, espaces euclidiens et non-euclidiens, matrices, tenseurs, hypernombres, etc.). Et j'ai très vite compris que tous les paradoxes et les problèmes convergeaient vers un seul domaine des mathématiques : la théorie des ensembles et les domaines proches comme la théorie des modèles ou la logique mathématique.

Je me suis donc trouvé face à tous les paradoxes de la théorie des ensembles (paradoxe du Menteur, paradoxe de Russell, paradoxe de Burali-Forti, etc.) et à tous les problèmes des fondements des mathématiques. Pour moi, tous les problèmes des sciences actuelles se trouvaient là, l'étau se resserrait sur la causes des anomalies, qui est tout simplement le Problème de la Négation de l'Univers TOTAL. J'ai compris aussi que les solutions que l'on affirmait avoir apporté à ces problèmes (comme par exemple la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel ou ZF) étaient dans le meilleur des cas seulement des béquilles qui aidaient le boiteux à mieux marcher, mais qui ne soignaient pas le problème de fond, sa paralysie. Et dans le pire des cas, les remèdes étaient de fausses solutions qui non seulement donnaient l'illusion d'avoir compris et traité les problèmes, mais repoussaient simplement les problèmes plus loin, dans des profondeurs où ils deviennent encore plus vicieux, plus pervers, plus sournois, plus difficiles à détecter.

C'est ainsi par exemple que l'on prétend avoir résolu le « problème » de l'« **ensemble de tous les ensembles** » concerné par les paradoxes de Cantor, de Russell, de Burali-Forti, etc. D'abord il faut dire que l'« **ensemble de tous les ensembles** » est justement une simple autre manière de parler de l'« **Ensemble de toutes les choses** », autrement dit l'**Univers TOTAL**. Il n'est pas un « problème », mais le vrai problème vient justement de la manière actuelle de faire la Négation, qui est **absolue** au lieu d'être **relative**, et aussi (ce qui revient au même) d'une mauvaise conception de l'**égalité**. C'est donc la logique de Négation avec laquelle on fonctionne qui est le Problème et non pas l'« **Ensemble de tous les ensembles** », l'**Univers TOTAL** donc (on aura l'occasion de comprendre tout cela dans la partie C).

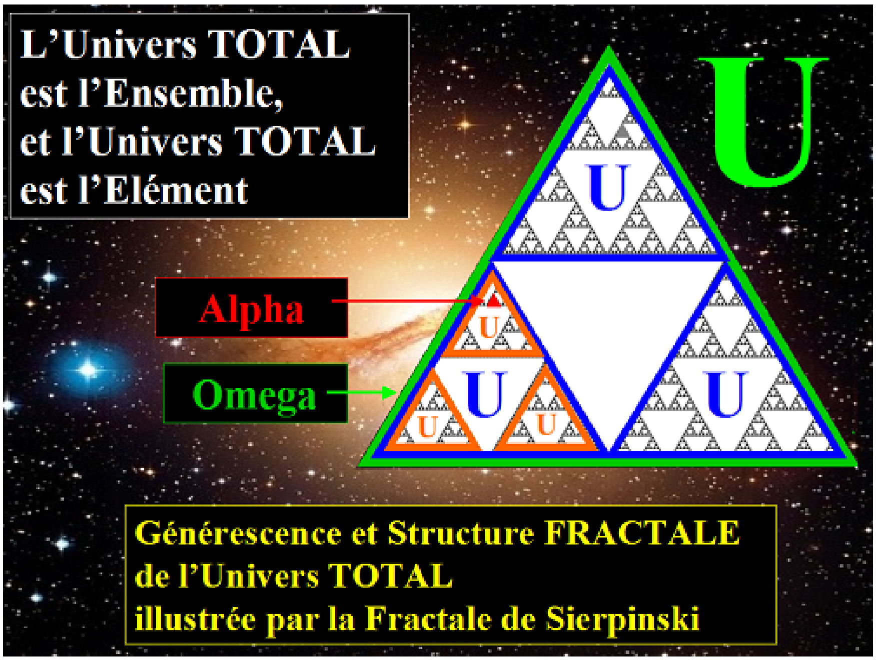
On disait donc que l'« **ensemble de tous les ensembles** » ne pouvait pas exister et par conséquent il fallait parler de « **collection de tous les ensembles** » ou de « **classe de tous les ensembles** ». Mais pour moi, « **ensemble** », « **collection** », « **classe** », etc., c'est fondamentalement la même notion (comme vous aussi, j'en suis sûr, vous le percevez intuitivement). Si donc la solution consiste à remplacer une notion par une notion synonyme, ce n'est pas vraiment une solution, quelque chose est faux quelque part. C'est comme le fait de dire qu'il y a un problème avec la notion de « **porc de tous les porcs** », et que la solution est de parler de « **cochon de tous les porcs** »… Sans parler du fait les mots « **porc** » et « **cochon** » sont tout simplement synonymes (comme « **ensemble** » et « **collection** » ou comme « **ensemble** » et « **classe** »), deux manières différentes de parler de la même choses, cette « solution » consiste seulement à balayer le problème chez les **porcs** et à le jeter chez les **cochons**…Car le problème qu'on dit avoir résolu à propos du « **porc de tous les porcs** » se cache maintenant sous une nouvelle identité, une nouvelle version : le problème du « **cochon de tous les cochons** ». Très évident, non ?

En clair, on n'a rien résolu fondamentalement avec la question de l'« **ensemble de tous les ensembles** » en disant « **collection de tous les ensembles** » (ou « **classe de tous les ensembles** ») , tant qu'on ne trouve pas un moyen d'éviter que la notion de « **collection de toutes les collections** » (ou « **classe de toutes les classes** ») pose aussi le même problème. Le problème ne doit plus se poser, **quel que soit le mot** qu'on utilise pour exprimer la notion fondamentale d'**ensemble**. C'est simple…

On baignait donc dans l'illusion d'avoir résolu les paradoxes, alors qu'en fait on les a simplement enfouis plus profondément sous terre. Les monstres et les démons que sont les paradoxes (c'est bien cela le mot, les démons) opèrent désormais en toute tranquillité dans les abysses et les fondements des sciences où ils falsifient toutes les sciences sans être vus et pris, puisqu'on ne les voit plus en surface et donc on les croit disparus.

Pendant qu'on est en train de crier victoire en théorie des ensembles avec les « solutions » comme la théorie axiomatique de Zermelo-Fraenkel (ZF), moi je ne participais pas aux festivités, je ne sablais pas le champagne et ne me goinfrais pas avec les toasts, mais je restais dubitatif et très perplexe devant les **collections** et les **classes**. Je constate que quand on ne les titille pas avec des axiomes du genre de ceux des **ensembles**, donc quand on les laisse avec une structure très basique et rudimentaire (on demande par exemple simplement de pouvoir faire des réunions et des intersections des **collections** (ou les **classes**) avec les connecteurs **OU** et **ET** mais pas d'opérations fortes comme celles que permettent le **schéma de remplacement** par exemple), ça va. Mais dès que l'on veut pousser un peu plus loin la **théorie des collections** ou la **théorie des classes** (comme avec la **théorie des ensembles**), les problèmes recommencent exactement comme avec les **ensembles**, les mêmes monstres et les mêmes démons (les paradoxes donc) pointent de nouveau leurs vilains nez…

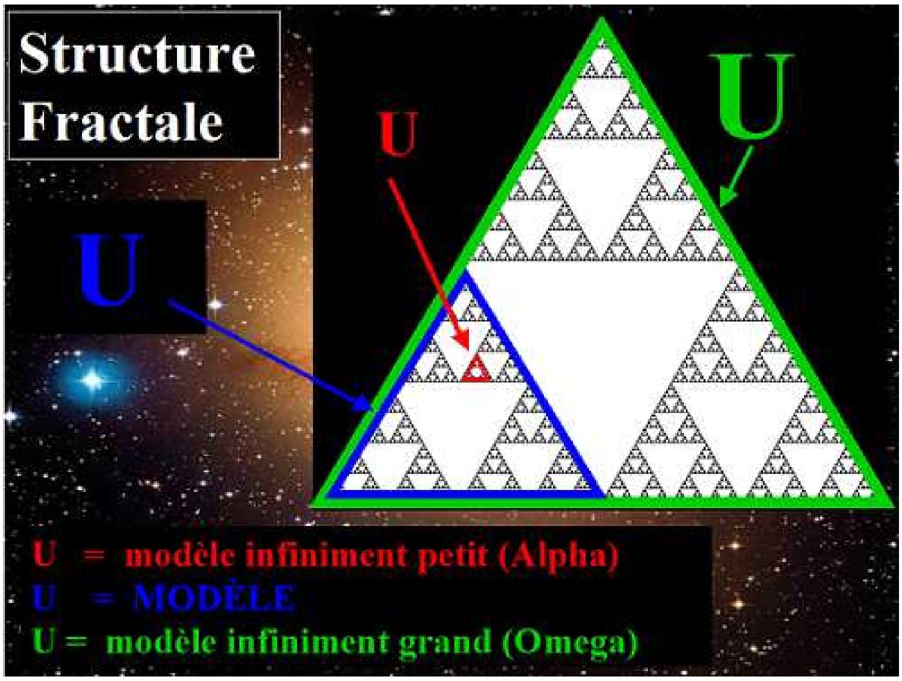
C'est pour résoudre véritablement les problèmes (et non plus se livrer aux artifices dont nous avons parlé) que la **Théorie des Univers** naquit dans les années 1990. Elle s'appelait à ses débuts la « **Théorie des univers ensemblistes** », puis elle prit le nom de « **Théorie des Univers** » à partir de 1997-98. Son but, à l'origine, était d'être une théorie axiomatique infiniment plus forte que celle de Zermelo-Fraenkel (ZF) et aussi que la Théorie des classes de Von Neumann, d'apporter de vraies solutions aux paradoxes de la théorie des ensembles et aux problèmes des fondements des mathématiques. En observant attentivement la structure des ensembles et en constatant que les **collections** (ou les **classes**) demandent très fortement d'être à un ordre supérieur ce que les **ensembles** sont à un ordre inférieur, il m'est apparu très clair qu'on n'a pas compris les secrets de cette structure, donc on ne sait pas vraiment ce que sont les **ensembles**. C'est cette **structure** méconnue des **ensembles** que j'ai commencé à appeler les « **univers ensemblistes** » puis simplement « **univers** ». C'est plus tard que le nom exact de cette **structure** très profonde et fondamentale des **ensembles** se révèlera : la **structure FRACTALE**.

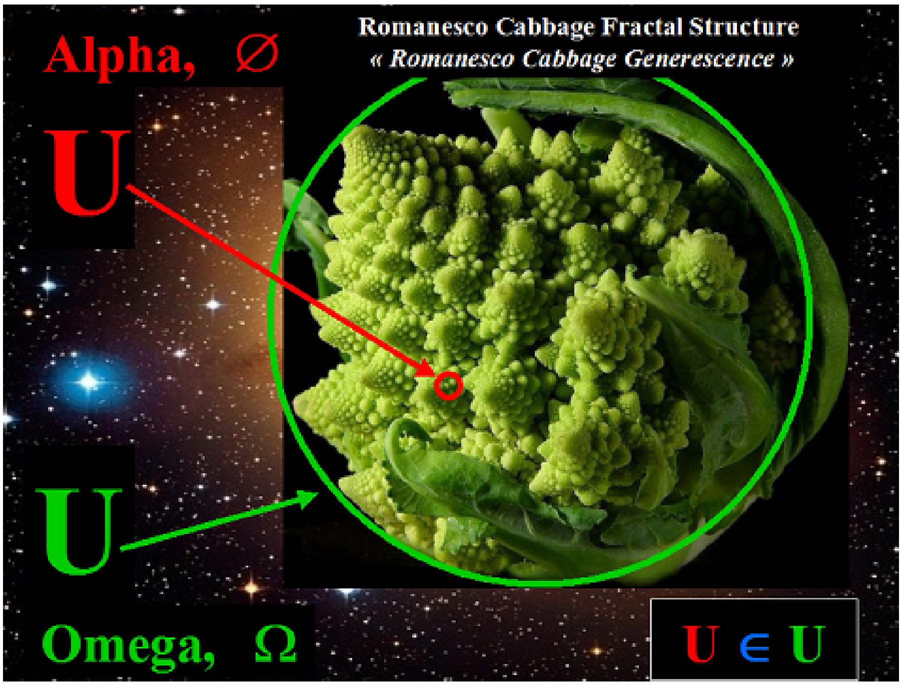


*La **structure FRACTALE** :*
la structure et la logique que réclamaient les ensembles
pour résoudre vraiment les paradoxes des fondements.
Autrement dit, c'est parce qu'on n'étudiait pas les ensembles avec cette logique
qu'il se produisait des paradoxes de toutes sortes.
*Plus précisément encore, les grands ensembles de l'envergure de **U***
*(l'**Univers des ensembles**)*
possèdent des propriétés spéciales
que la logique classique est très peu appropriée pour décrire,

*et qui sont simplement des **propriétés FRACTALES**.*
C'est l'incompréhension de ces propriétés dans le cadre étroit de la logique qui sert à les étudier qui a fait dire qu'on était en présence de « paradoxes » alors que ce n'en était pas.
*Par exemple, on voit ici qu'il est vrai de dire que **U** est à la fois en lui-même et hors de lui-même.*
Autrement dit, on a : **U ∈ U** et **U ∉ U**.
*Ceci paraît contradictoire, alors que c'est simplement la propriété d'une **structure FRACTALE** :*
*en effet, le **U** vert est hors du **U** bleu, puisqu'il est d'un ordre supérieur.*
*Mais par **équivalence***
*(la notion d'**Egalité** doit être maintenant l'**Equivalence** et non plus l'actuelle restreinte **Identité**)*
*le **U** vert est aussi à l'intérieur du **U** bleu, sous forme des **U** oranges par exemple.*
Rien que ceci suffit pour résoudre enfin et vraiment
tous les paradoxes de type Russell (comme aussi le paradoxe de Burali-Forti),
les paradoxes qui conduisent à une situation de la forme : **A ∈ A ⇔ A ∉ A**,
et plus généralement les situations de la forme : **A R A ⇔ A non-R A**,
*où **A** est un objet quelconque et **R** est une **relation binaire** quelconque.*

La notion d'**univers** est très simple : elle part du constat que la « **collection des ensembles**» ou la « **classe des ensembles**» (la manière déguisée de dire la notion « taboue » d'« **ensemble de tous les ensembles** ») est tout simplement l'**Univers des ensembles**, noté $\mathcal{U}$ dans la **Théorie des Univers**, mais maintenant **U** avec la **Théorie universelle des ensembles** (ou **Science de l'Univers TOTAL**). Pour donner aux **ensembles** et aux **collections** (ou **classes**) la **structure FRACTALE** qu'ils réclament à cors et à cris mais que l'on ne leur donnait pas (d'où les paradoxes), l'idée avec les « **univers** » est de créer au sein même du grand **Univers** $\mathcal{U}$ (l'ancêtre donc de ce qui est appelé maintenant l'**Univers TOTAL**, l'**Ensemble de toutes les choses**) des ensembles spéciaux **U** qui sont des petits modèles de $\mathcal{U}$, c'est-à-dire qui reproduisent à leur échelle ce que $\mathcal{U}$ est à la plus grande échelle. En d'autres termes, ils doivent être des « **univers d'ensembles** » (d'où leur nom à l'origine d'« **univers ensemblistes** »), des ensembles qui, quand on se place en leur sein, tout se passe exactement comme dans $\mathcal{U}$, ils sont de nouvelles versions de $\mathcal{U}$ au sein de $\mathcal{U}$ lui-même. Ce que je viens de décrire signifie simplement que je munis $\mathcal{U}$ d'une **structure FRACTALE**…





*Le **chou de Romanesco** : une structure fractale de la nature,*
*qui raconte silencieusement la manière dont l'**Univers** est structuré.*
*On voit que le chou, le grand modèle, l'**Oméga**, a en lui-même*
une infinité de petits modèles de toutes les tailles,
*jusqu'au tout petit modèle qui bourgeonne, l'**Alpha**.*
Si petit mais pourtant à son échelle il est la même chose que le grand à son échelle.
*Une **structure FRACTALE** montre que l'**Ensemble Vide** (**Alpha**) est aussi l'**Ensemble Plein** (**Oméga**).*
*L'idée que l'**Ensemble Vide** puisse pourtant avoir des éléments semble fausse et contradictoire.*
Or il s'agit simplement d'une propriété d'une structure fractale.
*Une fois encore la logique classique est inadéquate pour traiter la **logique FRACTALE**.*
*Et si l'on étudie les **ensembles** en les déconnectant de l'**Univers***
*et de la réalité que sont les **ensembles physiques (**les choses de l'**Univers**),*
*si donc l'on étudie les **ensembles** dans la pure abstraction comme les matheux purs et durs*
(et pas un matheux qui est aussi un physicien comme moi…),
alors la théorie des ensembles est obligatoirement fausse quelque part,
*car tous les objets de l'**Univers***
*(et les objets mathématiques sont aussi des objets de l'**Univers** voyons !)*
*sont des **ensembles**.*

La démarche de la **Théorie des Univers** est de partir des axiomes standard de la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel (ZF) et de lui ajouter un axiome spécial appelé l'**Axiome des univers** (ou plutôt de remplacer l'**axiome de l'infini** par cet axiome plus fort), qui a donc pour effet que l'**Univers des ensembles**, $\mathcal{U}$, acquiert une **structure FRACTALE**. Une fois posés les axiomes standard, la définition d'un **univers** ne requiert que cinq propriétés de base pour être à son tour une version de $\mathcal{U}$ dans lui-même. En effet, étant un **ensemble**, il hérite déjà de certaines propriétés précieuses de $\mathcal{U}$, ce qui rend inutile d'imposer à un **univers** (dans sa définition) de posséder ces propriétés.

Et l'**Axiome des univers** consiste ensuite à dire simplement ceci : « ***Tout ensemble appartient à un univers*** ».

Et une première conséquence immédiate de cet axiome est évidente : étant donné un univers **U**, il appartient à un univers **V** (qui est donc un **sur-univers**, un univers d'ordre supérieur), qui appartient lui-même à un univers **W**, etc., très exactement comme on le voit avec une **structure FRACTALE**. Il se construit ainsi une **hiérarchie des univers**, tous imitant leur grand modèle $\mathcal{U}$. L'**ensemble vide**, ∅, est un **univers trivial**, **le plus petit des univers**, que je n'ai pas nommé à l'époque l'**Alpha**, mais qui est ainsi nommé quand la **Théorie des Univers** a évolué pour devenir la **Théorie universelle des ensembles**, la **Science de l'Univers TOTAL** donc. Et l'**Univers des ensembles**, $\mathcal{U}$, apparaît comme **le plus grand des univers**, à l'autre extrémité de la formidable **hiérarchie des univers**. L'appellation naturelle qui s'impose pour désigner $\mathcal{U}$ est donc l'**Oméga**. La **structure FRACTALE** de $\mathcal{U}$ et des **univers**, telle que peut l'illustrer n'importe quelle **fractale** (comme la **fractale de Sierpinski** ou le **chou de Romanesco**), était formée.

Avant 2003 (l'année où la **Théorie des Univers** s'est mise à se transformer en **Théorie universelle des ensembles**), les **fractales** étaient juste une curiosité géométrique que je connaissais des années auparavant, mais qui (je le croyais) restait uniquement une affaire de certaines figures géométriques spéciales. J'ignorais alors toute l'importance et la fécondité des **fractales** pour comprendre non seulement les ensembles et leurs propriétés les plus fondamentales (que l'on avait mal comprises et que l'on a pris pour des paradoxes, en ce qui concerne les grands ensembles), mais tout simplement pour comprendre l'**Univers**, oui l'**Univers physique** ! Si tant est qu'il est un **univers** qui ne soit pas **physique**.

C'est l'un des enseignements les plus inattendus et les plus étonnants des **univers**. Le physicien que je suis fondamentalement était parti de recherches en physique et de problèmes de relativité et de mécanique quantique, pour me retrouver de fil en aiguille empêtré jusqu'au cou dans les problèmes des fondements des mathématiques et de la logique, des casse-têtes mathématiques qu'il fallait résoudre, qui m'ont occupé pendant de longues années, qui m'ont très grandement éloigné de la physique (à part mon métier d'enseignant en lycée où j'enseignais les mathématiques, la physique et la chimie, ce qui faisait que j'avais encore un pied en physique…) pour devenir presque un pur matheux, beaucoup plus mathématicien que physicien, un spécialiste de la théorie des ensembles.

Et voilà maintenant que contre toute attente, les **univers** me renvoient brutalement à ma casquette de physicien. Car il se trouve que les **univers ensemblistes** et les **univers physiques** deviennent une seule et même chose. Et du coup ce sont les frontières traditionnelles entre les mathématiques et la physique qui se gomment aussi, comme d'autres frontières aussi, entre les sciences et des domaines que l'on disait naguère n'avoir rien à faire en science, comme par exemple… **la question de Dieu**. Car là où les paradoxes des sciences sont enfin résolus et qu'apparaissent des choses comme l'**Alpha** et l'**Oméga** dont j'ai parlé (Apocalypse 22 : 13, la Bible), là aussi il se passe beaucoup de choses surprenantes, tous les secrets jusque là cachés de l'**Univers** se dévoilent, l'ombre de **Dieu** apparaît en sciences, et quoi qu'on fasse pour l'éviter, cette ombre divine devient incontournable... C'était donc **Dieu** qui se cachait derrière les problèmes des fondements des sciences ! Ou plus c'était le **Diable** les problèmes et les paradoxes (et le nom scientifique du **Diable** est la **Négation de l'Univers TOTAL** ou simplement la **Négation**, comme on va le comprendre), et **Dieu** (l'**Univers TOTAL**, l'**Univers FRACTAL**, l'**Alpha** et l'**Oméga**) est la **Solution** au Problème...

Mais le chemin était encore long pour réaliser pleinement les conséquences de la **Théorie des Univers**, jusque dans des domaines insoupçonnés (comme par exemple la question de Dieu et du Diable). Bien avant cela, les surprises avec les **univers** se produisaient en mathématiques tout simplement. Ayant suivi mes intuitions pour résoudre les problèmes des fondements et poser cela la notion d'**univers** et l'**Axiome des univers**, des choses aussi agréables qu'étonnantes se sont mises à se produire dans la théorie.

D'abord la première conséquence (qui, elle, n'était pas une surprise puisque la théorie était faite dans ce but) est qu'un univers **U** donné devient un « **ensemble de tous les ensembles** » en bonne et due forme (cela le deviendra quand l'ultime problème, la **Négation**, sera résolu, j'en reparlerai plus loin). Pour un univers **U** et un ensemble **E** donnés, l'ensemble **E** n'est pas forcément un élément de l'univers **U**; s'il ne l'est pas, cela veut dire simplement qu'il est un ensemble d'un ordre supérieur à l'univers **U**, il est un élément d'un univers **V** qui est donc un **sur-univers** de **U**. L'ensemble **E** et l'univers **V** sont ce qu'on appelait des « **collections** » ou des « **classes** » dans les pseudo-solutions aux paradoxes de la théorie des ensembles. Maintenant donc la question des « **ensembles** » et des « **collections** » (ou des « **classes** »), oui la question des « **porcs** » et des « **cochons** », est parfaitement réglée avec les **univers**! Bien que **E** et **V** n'appartiennent pas à **U** (et ce n'est pas un problème car tout le monde n'est pas obligé d'appartenir à un ensemble donné, par exemple tout le monde ou tous les êtres ne sont pas obligés d'habiter en France ou sur Terre…), tous sont des **ensembles**, tout simplement, et c'est là le point le plus important. Oui, tous sont des **ensembles**! On utilise désormais **un seul mot clef** pour la notion d'**ensemble**, à savoir le mot **ensemble**. Que l'on parle de **classe**, de **collection**, d'**univers**, de **sur-univers**, d'**hyper-univers**, etc., c'est toujours des **ensembles**!

Et dire que les univers **U** et **V** résolvent à leur niveau la question de l'« **ensemble de tous les ensembles** », c'est dire aussi que ce problème est pratiquement résolu au niveau de l'**Univers des ensembles** $\mathcal{U}$. Comme il s'agit d'un problème d'hiérarchie et de **structure FRACTALE**, pour faire de $\mathcal{U}$ un « **ensemble de tous les ensembles** » en bonne et due forme sans faire des jeux de mots du genre « **porc** » et « **cochon** », c'est-à-dire les artifices avec les mots « **ensemble**» et « **collection** » (ou « **classe** »), il suffit simplement de plonger $\mathcal{U}$ dans un **univers d'ensembles** $\mathcal{U}'$ plus grand vérifiant exactement les mêmes axiomes que $\mathcal{U}$ (dont l'**Axiome des univers** donc), et voilà donc $\mathcal{U}$ qui devient un très normal **univers U**, donc à son tour un

« **ensemble de tous les ensembles** » en bonne et due forme. Cette opération est simplement comme, avec une **fractale de Sierpinski** (ou n'importe quelle **structure fractale**), le fait de construire la **même fractale** mais d'ordre supérieur, de laquelle elle est une **sous-fractale**. Cette structure magnifique et puissante fait que ce que l'on dit d'une **fractale** donnée est vrai d'office pour toute version supérieure, ce qui rend inutile de construire effectivement cette version supérieure, puisqu'on refait à chaque fois la même chose, on répète à chaque fois tout simplement la même **structure fractale**. Avouons qu'une **structure** ou une **logique des ensembles** qui a pour conséquence de dire que « **porc** » et « **cochon** » sont finalement la même chose est bien plus satisfaisante, plus conforme à la nature et à l'intuition qu'une logique ou une méthodologie qui conduit à faire des distinguos entre « **porc** » et « **cochon** », oui entre « **ensemble**» et « **collection** » (ou « **classe** »)!

Mais l'une des propriétés les plus fascinantes des **univers**, qui m'a frappé assez vite et m'a fait m'interroger à leur sujet et a tracer la voie à suivre pour aboutir à la **Théorie universelle des ensembles**, est que la **hiérarchie des univers** et leurs propriétés générales sont tout simplement les mêmes que celles des **ordinaux** ! Dans ZF (la théorie axiomatique de Zermelo-Fraenkel) l'**ensemble vide** est le premier et **plus petit ordinal**, et il est aussi **le plus petit univers** dans la **Théorie des Univers**. Mais le **dernier ordinal** (**le plus grand ordinal**) ne peut exister dans ZF pour cause de paradoxe de Burali-Forti. Par contre, dans la **Théorie des Univers**, l'**Univers des ensembles** (**$\mathcal{U}$**) apparaît non seulement comme le **dernier univers** (**le plus grand univers**), mais aussi comme l'**ensemble plein**, qui ne peut exister lui aussi dans ZF pour les mêmes raisons. Face à ce constant frappant, il est très difficile de ne pas voir l'**Univers des ensembles** (**$\mathcal{U}$**) comme étant pratiquement le **dernier ordinal** cherché ! Mais quand on le considère comme tel, on a toujours le paradoxe de Burali-Forti : $\mathcal{U} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathcal{U} \notin \mathcal{U}$.

Cela ne pose en fait **aucun problème**; en ayant en tête la **structure FRACTALE** et ses propriétés, on comprend maintenant que ce paradoxe et tous les autres étaient de pseudo-paradoxes. Mais n'oublions pas qu'à l'époque je n'avais pas pleinement conscience de cette puissante **structure FRACTALE** (je construisais juste une **hiérarchie des univers** avec l'**Axiome des univers**), et aussi que je fonctionnais dans le paradigme de la **Négation** (ce qui implique une notion d'**égalité** qui est l'actuelle **Identité** et non pas la surpuissante **Équivalence**, synonyme d'**Alternation** et de **structure FRACTALE**).

Quand l'ultime responsable de tous les paradoxes (à savoir la **Négation**, celle cachée dans par exemple « $\notin$ » pour dire « **n'appartient pas**») sera enfin démasqué et le Problème qu'il est résolu, il apparaîtra non seulement que $\mathcal{U}$ est le **dernier ordinal** (noté alors **Ω** et ω), mais aussi (oh surprise!) que les **ordinaux** et les **univers** sont une seule et même chose (on comprendra mieux tout cela dans la partie C)! Et plus fort encore, il apparaîtra que… tout **ensemble** est un **ordinal**! Il est impossible pour un théoricien des ensembles fonctionnant avec la **Négation** (ou l'**Identité**) de comprendre comment, puisqu'on peut construire facilement des ensembles qui ne sont pas des **ordinaux**, pense-t-on.

Par exemple, dans les paradigmes classiques, étant entendu que **0, 1, 2, 3, 4, 5, …** sont des **ordinaux** (en l'occurrence ici des entiers naturels), l'ensemble à deux éléments **{0, 1}** est un **ordinal**, et précisément l'ordinal **2**. Mais l'ensemble lui aussi à deux éléments **{1, 4}** n'est pas un original si l'on raisonne avec l'**Identité** ou la **Négation**, puisqu'un ordinal doit avoir comme éléments tous les ordinaux inférieurs. Or ici les ordinaux **0**, **2** et **3** manquent dans ce ensemble pour qu'il soit l'ordinal **5**. Mais on voit bien que **{1, 4}** a lui aussi deux éléments. Bien entendu (au sens de l'**Identité**), il n'est pas **identique** à l'ordinal **2**, à savoir **{0, 1}**. Mais on ne lui demande pas d'être **identique** mais d'être **équivalent**! Quand on raisonne donc avec l'**Équivalence** (et non plus avec la restreinte **Identité**), l'ensemble **{1, 4}**, qui a deux éléments, est tout simplement autre manière de dire **2**, il est **équivalent** à l'ordinal **{0, 1}** ou **2,** il est l'ordinal **2** au sens de l'**Équivalence**. C'est ainsi qu'en fait, **TOUT ensemble est un ordinal**!

Plus besoin d'**axiome du choix** entre autres, car l'**Axiome des univers** (qui exprime la **structure FRACTALE** , la nature même des ensembles) règle une bonne fois pour toute cette question très épineuse relative aux ordinaux. Cette question, en son temps, a beaucoup divisé la communauté des mathématiciens (on avait les mathématiciens favorables à cet axiome, d'autres contre, et d'autres qui ne savaient même pas que ce problème existait…) avant de s'apaiser.

L'**Équivalence** (que l'on comprendra mieux par la suite et plus encore dans la partie C) n'exclut pas du tout le fait que les ensembles **{0, 1}** et **{1, 4}** ne sont pas **identiques**. Avec l'**Equivalence** on ne perd donc rien de ce que l'on peut faire avec l'**Identité** (celle-ci n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'**Equivalence**) et des vérités scientifiques auxquelles elle conduit. Mais l'**Équivalence** met encore plus puissamment en évidence les **liens entre les ensembles** et les objets mathématiques, leur **similitude**, leur **logique commune** etc., bref tout ce qui rend **équivalents** deux **ensembles**, deux choses, ce que ne fait pas l'**Identité**. C'est ainsi que l'**Equivalence** nous dit d'emblée que **{0, 1}** et **{1, 4}** sont deux manières différentes de dire **2**, ce qui rend inutile d'avoir à se casser encore la tête pour le dire avec des notions comme l'**équipotence** de deux ensembles (c'est-à-dire le fait pour deux ensembles d'avoir le même cardinal, le même nombre d'éléments). En effet, l'**équipotence** est elle-même tout simplement un cas particulier de relation d'**équivalence**.

Avec la **Théorie des univers** nous entrons doucement tout simplement au royaume de l'**Equivalence**, de la **structure FRACTALE**, de l'**Alternation** mais aussi du **Cycle** (comme on le verra plus loin et dans la partie C). Nous entrons (mine de rien) dans un tout autre paradigme (celui de l'**Univers TOTAL**), nous abandonnons lentement mais sûrement la maintenant vieille méthodologie de l'**Axiomatique** pour adopter la nouvelle méthodologie de la **Théorématique**.

Avec l'**Equivalence** donc, **TOUT ensemble est un ordina**l! Et l'**Univers des ensembles** ($\mathcal{U}$), qui est le **dernier univers** et le **dernier ensemble** (l'**ensemble plein** si manquant à la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo Fraenkel ou ZF), est tout simplement aussi le **dernier ordinal**. Cela met à la poubelle le soi-disant « paradoxe » de Burali-Forti, et la théorie des ensembles a désormais une **structure** et une cohérence parfaites: l'**ensemble vide** est le **premier univers** et le **premier ordinal** d'un côté (l'**Alpha**) et à l'autre bout l'**ensemble plein** est le **dernier univers** et le **dernier ordinal** (l'**Oméga**). Reconnaissons qu'une théorie des ensembles avec l'**ensemble vide** sans l'**ensemble plein** n'était pas du tout logique! Cette situation montrait que quelque chose ne tournait pas rond quelque part, qu'il ne fallait pas faire la fête après la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo Fraenkel (ZF) et d'autres réputées pour avoir « résolu » les paradoxes. Si fête des mathématiques il doit y avoir, c'est avec la **Théorie des univers** qu'elle commence… Et avec la **Théorie universelle des ensembles** (la **Science de l'Univers TOTAL**) cela doit être non pas le « bouquet final » mais mieux: le **Banquet final** !

La compréhension des **ensembles** et de leur nature profonde est de plus en plus étonnante avec les **univers** et leur **structure fractale**. La notion d'**univers** est donc éminemment révélatrice de la nature réelle de ces choses que nous appelons les **ensembles**. Les notions naguère déchiquetées par les mauvais paradigmes scientifiques (par la **Négation** plus précisément) s'unifient les unes après les autres, non seulement dans la théorie des ensembles, mais dans toutes les mathématiques ; et au-delà des mathématiques, la physique et toutes les autres sciences ; et au-delà des sciences traditionnelles des domaines autrefois écartés du champ des sciences. Car la question de l'**Univers TOTAL** c'est la question de l'**Etre TOTAL**, de l'**Etre Suprême**. Tout simplement, on part ainsi à la découverte de la **Réalité TOTALE** (car l'**Univers TOTAL** est la **Réalité TOTALE**, l'**Ensemble de toutes les choses**, l'**Ensemble de tous les ensembles**, l'**Univers de tous les univers**). C'est l'**Univers** dans lequel **toute chose existe** (puisque c'est l'**Ensemble de toutes les choses**), celui dans lequel prend fin toute **négation d'existence**, celle dans lequel la **Négation** prend fin tout simplement, au profit de l'**Alternation** (on le comprendra à partir de maintenant en suivant l'évolution de la **Théorie des univers**, dont le mot clef est le mot « **ensemble** », vers la **Théorie universelle des ensembles** dont le mot clef est plus marge encore, le mot « **chose** »).

Je découvre ébahi que la question de la séparation entre « **porcs** » et « **cochons** » était infiniment plus étendue que je ne pouvais le penser, qu'une même **chose** en vient à porter une infinité de noms différents (dans différents domaines et même dans le même domaine comme les mathématiques ou la physique) qui font penser qu'on a une infinité de notions différentes, alors qu'en réalité on ne parle fondamentalement que de la même **chose**. L'**Univers des ensembles**, l'**Ensemble de tous les ensembles**, est donc ce que j'appelle aujourd'hui l'**Univers TOTAL**, l'**Ensemble de toutes les choses**. Celui-ci est comme un Organisme, un Corps massacré à la tronçonneuse par la **Négation** et les mauvais paradigmes. Les morceaux du Cadavre saucissonné portent une infinité de noms différents. Tels morceaux s'appellent les « **ensembles** », tels autres s'appellent les « **collections** », tels autres les « **ordinaux** », tels autres les « **cardinaux** », etc.. Et moi aussi je tentais d'introduire de nouveaux types de morceaux appelés les « **univers** », et là oh miracle ! voilà, avec cette notion magique (celle que les **ensembles** réclamaient, la **nature** et la **structure** de toutes les **choses**), les morceaux du Cadavre qui se mettent à se rassembler de partout, à s'unifier, à converger vers une seule et même notion, à devenir la même **chose**. Le grand Puzzle se met à se rassembler et les contours du Corps qui ressuscite apparaissent de même que son nom et sa définition: l'**Univers TOTAL**, l'**Ensemble de toutes les choses** !

C'était donc lui le fameux « **ensemble de tous les ensembles** » que l'on disait impossible pour cause de « paradoxes », c'est lui le **dernier ordinal** que l'on disait qu'il ne pouvait exister, à cause du carton rouge que sortait le « paradoxe » de Burali-Forti.

Une étape très importante dans l'évolution de la Théorie des Univers est la compréhension que l'**Univers des ensembles**, $\mathcal{U}$, et l'**Univers physique**, que je note aujourd'hui simplement **U**, sont une seulement et même

chose. A partir de ce moment, l'**Axiome des univers** (« ***Tout ensemble appartient à un univers*** ») se transforma en un axiome encore plus fondamental que j'ai nommé l'**Axiome de la Physique**, et qui est le simple énoncé suivant : « ***Toute chose est un ensemble*** ».

Cet Axiome fut nommé aussi l'**Axiome universel des ensembles**, l'axiome fondateur de la **Théorie universelle des ensembles**. La grande nouveauté, qu'exprime l'adjectif « **universel** », est l'introduction du très important mot clef de la théorie, à savoir le mot universel **CHOSE**. En effet, avec ce mot, on s'échappe du cadre très étroit des mathématiques actuelles pour traiter désormais de ***toutes les choses*** dans le langage des ensembles.

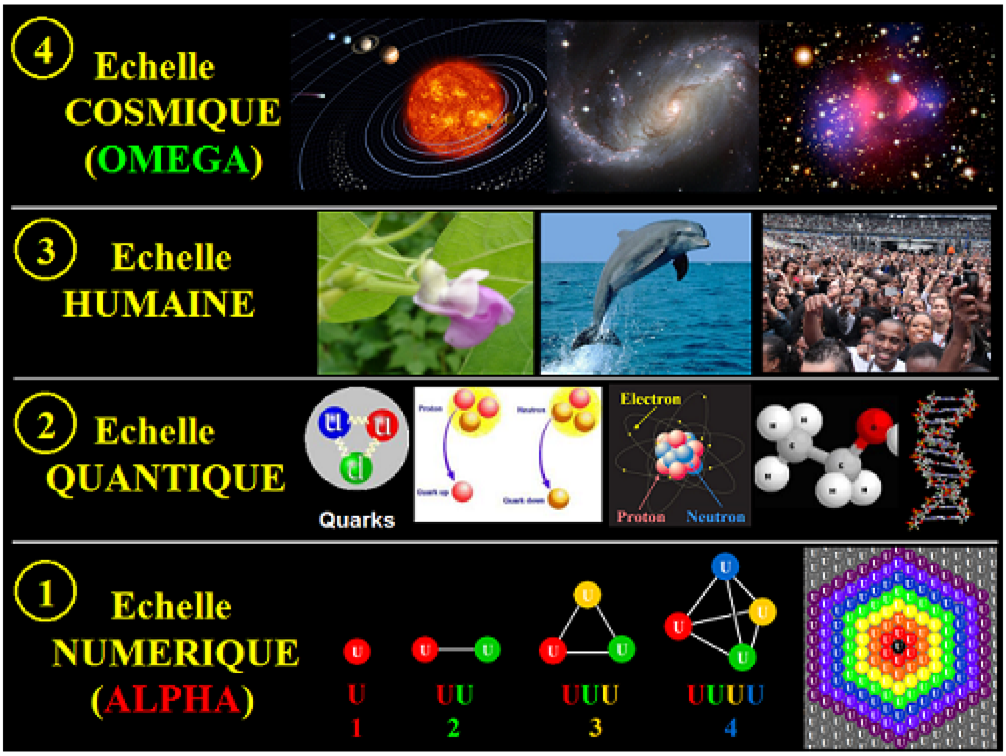
A la lumière des enseignements de la Théorie des Univers, j'ai compris une simple chose: pour faire toutes les mathématiques et les sciences, on n'avait besoin que de cet **Axiome universel des ensembles**, de ce simple énoncé donc: « ***Toute chose est un ensemble*** »! Je l'appelle un « Axiome », mais en fait ce n'est plus un axiome mais une simple définition. En effet, le mot « **chose** » permet enfin de définir la notion d'**ensemble**, ce que l'on ne faisait pas dans les théories classiques. En effet, on ne définissait pas la notion d'**ensemble** (alors qu'en fait elle était parfaitement définissable à partir du mot plus fondamental **chose**, et de plus d'une manière très simple, naturelle, **universelle**), mais on posait cette notion comme notion première et on posait les axiomes la concernant.

Avec le mot « **chose** », voici maintenant la simple définition de la notion d'«**ensemble**» et d'« **élément** »: « ***Un ensemble est une chose constituée d'autres choses appelées ses éléments*** ».

Avouons que c'est la notion d'**ensemble** telle que nous la concevons très **simplement** et très **naturellement**, c'est la notion la plus **intuitive** d'**ensemble**, la notion **universelle**. Toute **chose** que nous connaissons (et même que nous ne connaissons pas !) obéit à cette définition. Elle est indépendante de notre expérience et de nos subjectivités, elle est tout simplement **universelle** !

De cette notion **universelle** d'**ensemble** découle très simplement la définition de l'**Univers TOTAL**, qui est par définition la « ***chose constituée par toutes les choses*** », donc l'**Ensemble de toutes les choses**.

Et à défaut de connaître les **choses** plus **élémentaires** qui constituent une **chose A** donnée, cette **chose A** est constituée d'elle-même, chaque **chose** est son propre principal constituant, donc elle est un **ensemble** au sens le plus **universel** du terme. Et voilà donc l'**Axiome de la Physique** ou **Axiome universel des ensembles** qui devient un simple théorème dans cette nouvelle théorie des ensembles.



*La **Réalité** vue à toutes les échelles.*
*« Un **ensemble** est une **chose** faite d'**autres choses** appelées ses **éléments** ».*
*La notion d'**ensemble** quand elle n'est pas une pure **abstraction axiomatique**,*
*(comme je l'ai fait avec la **Théorie des Univers***
*mais ce dont je me suis repenti avec la **Théorie universelle des ensembles**…),*
*la notion d'**ensemble** quand donc elle n'est pas déconnectée de toute réalité physique,*
*mais quand elle est **naturelle**, **universelle,** comme je viens de la définir.*
*Le **langage des ensembles** est le langage même de l'**Univers**,*
c'est le langage qui s'impose aux mathématiques, à la physique, à toute la science !
*L'**Axiome de la Physique** ou **Axiome universel des ensembles** :*
*« **Toute chose** est un **ensemble** » !*
*Un **Théorème de l'Univers**, une **Loi simple de la Nature** qui saute aux yeux:*
*moi qui vous parle, je suis un **ensemble**, fait d'une **tête**, de **bras**, de **pieds**, etc.,*
*et vous aussi, vous êtes un **ensemble**, constitué de différents **éléments**,*
*tout ce qui nous entoure est un **ensemble** de la même manière.*
Toute chose est un ensemble
*de l'Infiniment petit (échelle **Alpha**) à l'Infiniment grand.(échelle **Oméga**).*
*Une **molécule** est un **ensemble** fait d'**atomes**, eux-mêmes des **ensembles** faits de **particules**,*
*elles-mêmes faites encore d'autres **choses** plus **élémentaires**.*
*Et à l'échelle la plus fondamentale tout est **numérique**, tout est ce qu'on appelle un **ordinal**,*
*c'est une très grande vérité de l'**Univers** qu'a commencé à révéler la **Théorie de l'Univers***
*et que révèle encore plus maintenant la **Théorie universelle des ensembles**,*
*la **Physique de toutes les choses**, la **Science de l'Univers TOTAL**.*
*Un **nombre** ou un **ordinal** est un **ensemble**, que l'on peut définir mathématiquement*
comme étant l'ensemble de tous les nombres plus petits que lui donc lui-même exclu
*(définition non-cyclique des **ordinaux**, qui est la conception actuelle de la notion d'**ordinal**),*
ou comme l'ensemble de tous les nombres jusqu'à lui-même inclus
*(la nouvelle conception cyclique des **ordinaux**).*
*Mais les **nombres** eux non plus ne sont plus ces choses mathématiques **abstraites***
*des objets purement « mentaux » déconnectés de l'**Univers** et dépourvus de toute **réalité physique** !*
*Les **nombres** ne sont pas de simples objets du langage qui servent à décrire l'**Univers et les choses**,*
*mais les **nombres** sont **toutes les choses** de l'**Univers**, jusqu'à l'**Univers** lui-même.*
*Les **nombres** sont des **objets physiques** qu'il faut découvrir maintenant :*
*les **générescences** ou les **informations unaires**,*
*elles sont le point de rencontre entre les **mathématiques**, la **physique** et l'**informatique**,*
là où les trois sciences deviennent une seule science,
là où toutes les sciences deviennent la même science :
*la **Théorie universelle des ensembles** ou **Science de l'Univers TOTAL**.*
*La **Théorie des Univers**, quand elle est devenue la **Théorie universelle des ensembles**,*
*a livré une vérité extraordinaire sur l'**Univers TOTAL** :*
*toute chose et absolument toute chose est constituée d'**UN seul constituant élémentaire**, noté ici **U**,*
*appelé l'**Alpha**, et qui est aussi l'**Univers TOTAL**, l'**Oméga** !*
*TOUT est créé par simple **itération** ou répétition du constituant **U**, l'**Alpha**:*
***U, UU, UUU, UUUU, UUUUU, UUUUUU, UUUUUUU, …** .*
*Ce que je viens d'écrire est le début de la liste de **TOUTES les choses**,*
*la liste de **TOUS les éléments** de l'**Univers TOTAL** !*
Du fait de leur formation, on voit que ces choses physiques
*sont aussi les **nombres** ou les **ordinaux** écrits dans un système de numération **unaire**,*
*c'est-à-dire les nombres écrits avec un seul chiffre, qui signifie alors **0**,*
*à la différence d'une numération binaire écrite avec deux chiffres, le **0** et le **1**.*
*Dans ce cas, c'est de l'**information binaire** et l'**informatique** associée est **binaire**.*
*Mais à l'**Univers TOTAL** l'**Ensemble de toutes les choses** est **Unique** de par sa définition,*
*il est l'**Information unique** qui constitue toutes les choses,*
*tout est **information pure**, en l'occurrence de l'**information unaire**,*
*constituée avec une seule information élémentaire, notée ici **U** mais dont le sens est **0** !*
*Autrement dit, les **générescences** ou les **informations unaires** sont :*
0, 00, 000, 0000, 00000, 000000, 0000000, …**, ou **0, 1, 2, 3, 4, 5, …
*La structure de base des unités d'informations est la structure **simplexe** :*
***point, segment, triangle équilatéral, tétraèdre régulier, pentatope régulier,** etc.*
et cela devient très vite complexe, jusqu'a donner les premiers objets quantiques :
*les particules comme les **photons, les neutrinos, les quarks,***
***les électrons, les protons, les neutrons**, etc.*

*Puis on arrive à notre échelle : **les cellules, les organes, les êtres comme nous**, etc.*
*Et cela continue jusqu'à l'**Univers TOTAL** en dernier, en passant par les univers comme le nôtre.*
*C'est ainsi que se construisent toutes les choses, tous les **univers**,*
*à partir du plus petit **univers**, l'**Ensemble vide**, l'**Alpha** ou ∅ ou **0** ou **U**,*
*qui n'est en fait rien d'autre que le grand **Univers**, l'**Ensemble Plein**, l'**Oméga** ou **Ω** ou **ω** ou **𝓤**.*

Qui dit **Ensemble de toutes les choses** dit donc désormais aussi **Ensemble de tous les ensembles**, puisque **toute chose est un ensemble**. Par conséquent, plus que jamais il fallait résoudre le « paradoxe » que cet Ensemble causerait selon les paradigmes actuels. L'**Univers TOTAL** était donc l'**Ensemble** que les mathématiques actuelles excluaient de leur sein.

Il est devenu évident, surtout à la lumière de la **Théorie des Univers** et de ses précieux enseignements sur la structure des ensembles, que l'**Ensemble de toutes les choses** ou **Ensemble de tous les ensembles** avait toute sa place en théorie des ensembles ! Sans cet **Ensemble** par excellence, la notion d'**ensemble** perdait même son sens ! Et aussi, comment peut on faire des sciences qui affirment une chose qui revient à dire que **l'Univers n'existe pas** ou **ne peut pas exister**, car son existence cause des paradoxes ! C'est ce que veut dire l'idée selon laquelle l'**Ensemble de tous les ensembles** ne peut pas exister ! Ce qui est certain, c'est que **quelque chose est faux quelque part** dans ces sciences, et il fallait trouver la fausseté. Comme déjà dit aussi, il était de plus en plus clair que l'**Ensemble Vide** sans l'**Ensemble Plein** était une absurdité, d'autant que la **Théorie des Univers** a montré que l'**Ensemble Vide** est le **premier univers** et que l'**Ensemble Plein** était le **dernier univers**. Il s'imposait à un tel point que ceci aussi est devenu évident : il fallait chercher ailleurs la cause des paradoxes imputés à cet Ensemble et à d'autres, comme aussi l'**Ensemble de tous les ordinaux**, le dernier ordinal qu'interdisait le paradoxe de Burali-Forti.

Dès que j'ai commencé à développer la théorie basée sur l'**Axiome de la Physique** (l'axiome qui en fait n'en est pas un comme je viens de l'expliquer) et à voir les extraordinaires conséquences de cet énoncé, j'ai compris aussi le Problème de toutes les sciences, et au-delà, de ce monde tout entier : la **Négation** ! C'est donc la **Négation** (l'apparemment très normal connecteur **NON** que j'ai abondamment utilisé dans la Théorie des Univers) qui était la cause de tous les paradoxes des mathématiques et des sciences.

Cette **Négation** telle qu'on raisonne avec elle dans les sciences de ce monde, était trop forte, elle était une **Négation Absolue** alors qu'elle devait être **très relative**. Pour comprendre la question dans toute son étendue, cela veut dire que quand on dit que quelque chose **n'existe pas** ou est **impossible**, il faut limiter cette **Négation** à un contexte donné, il faut dire par exemple que cette chose n'existe pas en France, dans notre monde ou pas maintenant. Il ne faut pas nier cette chose dans l'absolu, à l'échelle de l'**Univers TOTAL**. Car dans l'**Univers TOTAL**, l'**Ensemble de toutes les choses**, toute chose existe et le contraire de toute chose aussi, tout est vrai à l'échelle de l'**Univers TOTAL** et le contraire de tout aussi. C'est cette vérité fondamentale des grands ensembles comme l'**Univers TOTAL**que la logique actuelle ne supporte pas, qu'elle prend pour un paradoxe, au lieu de **relativiser** sa **Négation**, de changer de connecteur de négation, de fonctionner avec une logique qui ne nie pas aussi catégoriquement les vérités contraires, car cette logique interdit de ce fait l'existence de grands ensembles ou plus exactement des ensembles ayant un caractère de **Totalité**, de **Complétude**, comme justement l'*Ensemble de **TOUTES** les **choses***, l'*Ensemble de **TOUS** les **ensembles***, l'*Ensemble de **TOUS** les **ordinaux***, l'*Ensemble de **TOUS** les **cardinaux***, etc.

Ce sont des ensembles de type **Univers**, car ils se reconnaissent par l'usage dans leur définition du quantificateur **universel**, le mot « **TOUT** », avec un nom commun lui-même **universel**, **existentiel**, **général**, **fondamental**, comme justement les mots : **chose**, **existence**, **possibilité**, **réalité**, **vérité**, **être**, **objet**, **ÉLÉMENT**, ***nombre***, ***ordinal***, ***cardinal***, ***univers***, ***collection***, ***classe***, ***ENSEMBLE***, etc. Attention ! ces notions **fondamentales** et **existentielles** **sont très sensibles** à la **Négation** ! Dès qu'on utilise la **Négation** avec elles et que la **Négation** devient **absolue**, alors le **paradoxe** est immédiat ! C'est d'ailleurs la meilleure façon de montrer que la **Négation Absolue** est la vraie cause de tous les paradoxes.

Par exemple, considérons le mot **chose**, la plus fondamentale de ces notions, le nom commun le plus général. Appliquons-lui la **Négation** (le connecteur **NON** donc) et formons donc la notion de **non-chose**. Puisque la notion de **chose** est la nom commun le plus général (c'est-à-dire tout ce dont nous parlons est une **chose**), le nouveau nom commun que nous venons de former, **non-chose**, est donc aussi une **chose**. Autrement dit, nous avons la **chose** qui est une **non-chose**! Le **paradoxe** est alors immédiat si la **Négation** dans le mot **non-chose** est **absolue** au lieu de d'être **relative**. On voit bien que pour avoir le **paradoxe** on n'a pas eu besoin d'être devant un énoncé compliqué faisait intervenir plusieurs notions, comme par exemple les paradoxes de Russell ou de Burali-Forti. Nous avons ici seulement deux mot en présence : **chose** et **non**, et patatra ! c'est comme la **souris** (ici le mot **chose**) et le **chat** (ici le mot **non**), et le **chat** croque immédiatement la **souris**, elle trépasse !

Et c'est très général : les notions **existentielles** ou **positives** ne font pas bon ménage avec la **négation**. Plus elles sont générales plus le contact avec la **Négation** est fatal quand celle-ci est **absolue**. Par exemple encore, prenons le mot **être**, et pensons-le comme le mot le plus général. Alors avec la **Négation**, nous nous retrouvons confronté immédiatement au **paradoxe** de l'**être** qui est un **non-être** ou du **non-être** qui est un **être**. Si nous faisons le choix du mot **objet** comme mot le plus général. Alors tout se casse la figure avec le **non**, car nous avons un **objet** qui est un **non-objet** ou un **non-objet** qui est un **objet**.

Avec les mots comme **existence**, **ensemble** ou **ordinal**, etc. le paradoxe n'est pas direct car on ne les pense pas comme les mots les plus généraux. Mais dans un contexte où ils opèrent avec la **Négation**, celle-ci finit par les croquer et on a les paradoxes comme le **paradoxe existentiel**, qui est cet énoncé avec le **quantificateur existentiel** : « ***Il existe des choses qui n'existent pas*** ». Et comme cet énoncé est paradoxal, alors son contraire parfait : « ***Toute chose existe*** » exprimé avec le **quantificateur universel** est un théorème que j'appelle le **Théorème de l'Existence**, que l'on retrouve plus directement avec la simple définition de l'**Univers TOTAL**, l'**Ensemble de toutes les choses**, l'Ensemble dans lequel donc « ***Toute chose existe*** », de par sa définition même.

Avec le mot **existence** le paradoxe est moins directe qu'avec le mot **chose** par exemple, où le vrai coupable des paradoxes (la **Négation** donc) est pris directement en fragrant délit ! Mais avec le mot **existence**, le paradoxe est plus direct qu'avec le mot **ensemble**, où il faut des situations comme cette du paradoxe du Russell pour exhiber le paradoxe : « *L'**ensemble A** dont les **éléments** sont les **ensembles non-éléments** d'eux-mêmes est-il **élément** de lui-même ?* »

Comme nous le verrons plus loin avec un éclairage nouveau sur le paradoxe de Burali-Forti, l'ensemble A dont nous parlons ici cache simplement l'ensemble de tous les **ordinaux**, qui est lui l'objet de cet autre paradoxe, toujours dû à la **Négation** dans son rapport difficile avec les notions **existentielles** ou **positives**. Les ordinaux sont par excellence les **ensembles non-éléments** d'eux-mêmes, d'où le paradoxes quand le mot « **non** » est absolu.

Ces notions fondamentales et bien d'autres se reconnaissent au fait toutes sont une manière ou une autre, directement ou indirectement, de dire **ÉLÉMENT** comme ceux de la première série, ou ***ENSEMBLE*** comme ceux de la seconde série (écrits en *italique*).

Cela veut dire quand dans notre langage, quel que soit le domaine, nous disons des choses qui reviennent fondamentalement à dire **élément** ou **ensemble** ou les deux en même temps. Le reste est une simple question de mots, d'expression ou d'énoncés, nous sommes tout le temps en train de remplacer une de ces notions fondamentales par une autre qui lui est synonyme après analyse profonde. Comme nous l'avons dit plus haut, **toute chose est un ensemble**, un **ordinal**, un **nombre**, une **information**, une **générescence**, etc., tout est fondamentalement la même chose, toutes les notions fondamentales reviennent à dire la même chose, que ce soit **chose**, **ensemble**, **ordinal**, **nombre** ou autre.

Donc, quand nous utilisons le quantificateur **universel** (le mot « **TOUT** » qui a lui seul signifie « **Univers** ») avec l'un de ces noms communs qui sont synonymes fondamentalement d'**élément** ou d'**ensemble**, nous sommes quelque part en train de dire « **TOUS les éléments** » ou « **TOUS les ensembles** », ce qui est une manière ou une autre de définir tout simplement l'**Univers**. L'Ensemble dont nous parlons est donc simplement une de l'infinité de manières de définir l'**Univers TOTAL**, ce qui est justement le cas de l'**Ensemble de tous les ensembles** ou de l'**Ensemble de tous les ordinaux** par exemple. Par conséquent, tous les différents « paradoxes » que l'on croit noter en théorie des ensembles, en physique ou ailleurs sont le même problème, et il concerne la même entité, à savoir l'**Univers TOTAL**. Tout ensemble de type **Univers** que l'on exclut ou dont on dit qu'il ne peut pas exister pour cause de « paradoxe » revient à exclure ou à nier le seul et même **Univers TOTAL**.

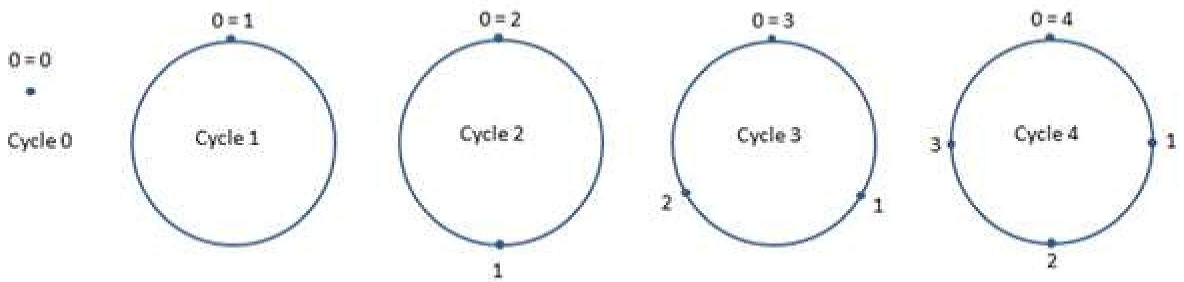
Quand nous disons par exemple : « **un ensemble non-élément de lui-même** » (notion qui intervient dans le paradoxe de Russell) ou « **un habitant du village qui ne se rase pas lui-même** » (notion qui intervient dans le paradoxe du barbier, une autre formulation du même paradoxe de Russell), nous sommes simplement en train de dire « **un ordinal** », car ce sont les **ordinaux** qui sont les ensembles par excellence qui ont cette propriété fondamentale de **ne pas être éléments d'eux-mêmes** ($\alpha \notin \alpha$), parce que la définition d'un **ordinal** est d'être l'**ensemble des ordinaux plus petits que lui**, donc d'être l'**ordinal** qui vient après eux, d'où l'**ordre** qu'incarnent les **ordinaux** et leur nom d'**ordinal** d'ailleurs.

D'où ce que l'on croit être un paradoxe de parler de « **dernier ordinal** » ce qui signifie qu'il est l'**ensemble de tous les ordinaux** y compris lui-même. Donc il est un élément de lui-même ($\alpha \in \alpha$) ou plus petit que lui-même ($\alpha < \alpha$) , ce qui revient au même. Un tel dernier ordinal a donc la particularité de vérifier à la fois « $\alpha \in \alpha$ » et son **contraire** « $\alpha \notin \alpha$ », d'où le fameux paradoxe de Burali-Forti, qui n'est donc qu'une autre forme du paradoxe de Russell selon lequel il ne peut exister un **ensemble** dont les éléments sont les **ensembles non-éléments d'eux-mêmes**. Ce paradoxe est donc simplement en train de dire d'une autre manière qu'il ne peut exister un **ensemble de tous les ordinaux**.

Voici comment les ordinaux se définissent à l'échelle la plus fondamentale : **0, 00, 000, 0000, 00000, 000000, 0000000, 00000000, …**, donc des **générescences** ou **informations unaires**, qui sont les nombres que nous notons : **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ….** On voit bien que le **nombre** ou **ordinal 0**, le **premier** nombre, est en train de dire qu'il n'y a pas de nombre avant lui ; et l'**ordinal 1**, le **deuxième** nombre, est en train dire qu'il y a **un** nombre avant lui, à savoir le **0** ; et l'**ordinal 2**, le **troisième** nombre, est en train dire qu'il y a **deux** nombres avant lui, à savoir le **0** et le **1**, etc. C'est ainsi la simple définition, la logique et le sens des ordinaux c'est ainsi qu'ils incarnent l'ordre.

Et on note aisément aussi que le **0** est le **premier** nombre, donc quelque part le **1**, ce qui est d'autant plus évident quand on voit que l'information unaire ou la générescence qu'il est, est codée avec **un seul chiffre**, « **0** ». Il est donc le **1** par sa **forme** (nous disons aussi par sa **formation**) mais le 0 par son sens (nous disons aussi par son **informe** ou par son **information**). Et on note que le **1** est le **deuxième** nombre, donc quelque part le **2**, ce qui est évident aussi quand on voit que l'information unaire ou la générescence qu'il est, est codée avec **deux chiffres**, « **00** ». Il est donc le **2** par sa **forme** ou sa **formation**, mais le **1** par son **informe** ou son **information**. Et ainsi de suite pour tous les **ordinaux** : **premier**, **deuxième**, **troisième**, **quatrième**, etc. (ce qui est le vrai sens et le sens le plus naturel de la notion d'**ordinal** ou d'**ordre**), les **formes** ou les **formations** des nombres, qui sont leurs **prédécesseurs** par leur **informe** ou leur **information**. Ils expriment alors la **quantité** de tous les **ordinaux** avant eux (ce qui est le vrai sens de la notion de **cardinal**, le nombre en tant que **quantité**).

Mais que ce soit les **formes** ou les **informes** (les **formes** ou les **sens**), les **formations** (géométrie, physique) ou les **informations** (informatique, mathématique), les **ordinaux** (les dispositions spatiales, géométriques ou physiques ; les configurations, les structures) ou les **cardinaux** (les quantités, les mesures), on parle des mêmes **générescences** (ou **formations unaires**), des mêmes **nombres** (ou **informations unaires**). C'est la même réalité mais vue sous deux angles différents, ce qui est le **0** d'un point de vue est aussi le **1** d'un autre point de vue. Donc si l'on fait une science qui nie l'égalité « **0 = 1** » et qui ne dit que « $\mathbf{0 \neq 1}$ », ou encore qui ne dit que « $\mathbf{0 \notin 0}$ » (et plus généralement pour tout ordinal α: « $\alpha \notin \alpha$ ») et nie « $\mathbf{0 \in 0}$ » (et plus généralement pour tout ordinal α: « $\alpha \in \alpha$ »), elle est fausse quelque part, elle **nie une réalité** profonde de l'**Univers**, elle **nie l'Univers TOTAL** tout simplement !



*L'égalité « **0 = 1** » est considérée comme mathématiquement fausse,*
*raison pour laquelle on dit que l'équation : **x = x + 1** est insoluble dans l'ensemble des nombres réels.*
*En effet, elle conduit à dire : **x – x = 1** donc **0 = 1**,*
*ou selon cet autre calcul à **diviser par 0** :*
***x = x + 1** donc **x – x = 1** donc **1x –1x = 1**,*
*donc **(1 – 1)x = 1** donc **0x = 1** donc **x = 1/0**.*
*Calcul algébrique déclaré faux parce qu'à la base on dit que **« 0 = 1 »** est faux,*
*alors que cette égalité est une simple vérité du **Cycle 1** !*
Et plus profondément encore,
*nous venons de voir que la générescence « **0** »*
*qui est le **0** par son **information** est le **1** par sa **formation** !*
*Donc fondamentalement on a « **0 = 1** » !*
*De même, la générescence « **00** » est le **1** par son **information** est le **2** par sa **formation** !*
*Donc aussi « **1 = 2** », donc aussi « **0 = 2** »,la vérité du **Cycle 2**, etc.*
*La fausseté n'est pas les égalités de la forme « **0 =** $\boldsymbol{\omega}$» (le **Cycle** $\boldsymbol{\omega}$),*

*mais la vraie fausseté est du côté des sciences qui nient ces vérités simples et profondes de l'Univers. Bref, le vrai **Problème** est la **Négation de l'Univers TOTAL** !*

C'est très normal de dire en mathématiques par exemple que « **0 ≠ 1** », mais il faut envisager la possibilité que « **0 = 1** » ait un certain sens mathématique (en l'occurrence ici une vérité du **Cycle 1** comme on commence à le comprendre profondément et comme on le comprendra encore dans la partie C), sinon les mathématiques sont **fausses** quelque part ou **incomplètes**, elles ne disent qu'une vérité partielle ce qui est une forme… de **mensonge**, ce qui est inacceptable pour la science **réputée la plus exacte** !

C'est normal aussi de dire que « **3 < 5** », mais que cette vérité n'exclue pas la possibilité que « **3 > 5** » soit vrai aussi (ce qui est également vrai aussi en logique **cyclique**). Sinon la science est encore fausse dans ses fondements. Il faut maintenant savoir que tout énoncé a toujours un sens dans l'**Univers TOTAL**, il exprime toujours une certaine vérité, une certaine réalité qu'on peut simplement ignorer… ou volontaire ne pas vouloir connaître !

C'est ainsi que des physiciens ont réussi à imposer à la physique les paradigmes qui sont les siens, à savoir que ne doit être accepté comme « vérité » de la physique que ce qui est confirmé par l'observation ou la mesure. Autrement dit, le paradigme selon lequel la vérité ou la réalité est ce que nous pouvons observer, voir, toucher, mesurer, etc. En soi, c'est déjà « primitif » comme paradigme, car quelqu'un qui se jamais sorti de son village ou de son pays depuis sa naissance pour voir que d'autres pays et d'autres réalités existent, quelqu'un dont les moyens d'observation ou de mesure sont ceux de son village ou de son pays, commet évidemment une très grave erreur de paradigme, il s'enferme d'office dans SA réalité en disant que la Réalité TOTALE se réduit à ce qui lui est accessible ! Les paradigmes restrictifs et handicapants actuels des physiciens ne sont pas plus malins que cela ! Les germes de la **Négation** de l'**Univers TOTAL**, de la **Réalité TOTALE** sont dans ces paradigmes, autrement dit on s'est donné comme règle de ne pas voir ce qu'on ne veut pas voir, entre autres de ne pas voir des choses… comme **Dieu** ! Car c'est bien lui qui est derrière l'**Ensemble de tous les ensembles**, l'**Ensemble de toutes les choses et de tous les êtres**, la **Réalité TOTALE**, l'**Etre TOTAL**, l'**Etre Suprême** que l'on nie ainsi par ces paradigmes de la Négation, par l'interdiction de dire en science : « **0 = 1** », « **0 = ω** » ou « **Alpha = Oméga** » (Révélation 22 : 13).

Et si les physiciens font une expérience pour établir ou réfuter l'existence d'un objet cherché en physique (comme par exemple le boson de Higgs qu'ils ont traqué pendant des décennies et qu'ils crient avoir trouvé alors qu'ils pouvaient savoir à coup sûr qu'il **existe** sans faire la moindre expérience mais en faisant simplement la physique dans le paradigme de l'**Univers TOTAL**), si l'expérience est négative ou conclut à la non-existence de l'objet, qu'ils disent simplement que l'objet n'a pas été trouvé dans **notre** univers ou avec nos moyens (nos accélérateurs de particules comme le LHC qui a récemment servi à traquer le boson de Higgs surnommé la « particule Dieu »), mais que, malgré l'expérience négative, l'objet existe dans un **AUTRE** univers, dans un **AUTRE** contexte de l'**Univers TOTAL**.

La physique repose beaucoup sur les mathématiques, donc si les mathématiques sont fausses dans leurs fondements la physique est fausse aussi ! Par exemple, si le physicien cherche un objet **x** ou doit calculer une grandeur physique associée à **x** (comme par exemple sa **masse** ou sa **charge électrique**) et qu'il tombe sur l'équation : **x = x + 1**, équation qui conduit à dire que « **0 = 1** » ou que la grandeur **x** est infinie ou est égale à la **division de 1 par 0** (ou **x = 1/0**), il déclarera que c'est **impossible**, que cela n'a **aucun sens physique**, etc. Voilà comment la physique, dans la droite ligne des mathématiques sur lesquelles elle repose, **nie** l'**Univers TOTAL**, elle qui pourtant devrait le plus défendre l'**Univers TOTAL**, car après tout l'**Univers**, c'est son domaine, non ?

Mais voici le simple conseil que le **physicien de l'Univers TOTAL** que je suis donne aux physiciens : ils tiennent absolument que toute vérité physique soit conforme à l'observation et à l'expérience ? Très bien, je l'accepte volontiers. Alors dans ce cas, qu'ils observent bien la **Nature** et en tirent enfin les vrais enseignements, car ce n'est pas avec les yeux qu'on observe l'**Univers** mais avant tout avec… son cerveau ! Un cerveau mal réglé par une mauvaise logique (une logique de **Négation**) se trompe complètement sur l'interprétation des **informations** que pourtant les yeux ou les instruments d'observation et de mesure lui transmettent bel et bien ! Donc je leur dit maintenant de poser momentanément leurs appareils et de commencer l'observation et la compréhension de l'**Univers** par leurs yeux. Avant de manier le moindre instrument de mesure de longueur, le moindre chronomètre, le moindre thermomètre, la moindre balance, le moindre ampèremètre ou voltmètre, le moindre oscilloscope, le moindre télescope, le moindre accélérateur de particules et à plus forte raison le gigantesque LHC, qu'ils s'arrêtent juste cinq minutes pour bien s'observer eux-mêmes, pour observer tout ce qui les entoure, juste avec l'appareil d'observation appelé les yeux, et commencent par comprendre et simple vérité de l'Univers : « ***Toute chose est un ensemble*** » !

Qu'ils posent cette simple phrase comme vérité première de la Physique, et enfin la Physique démarre bien ! Qu'ils comprennent ensuite que toute la physique doit maintenant se faire dans le **Langage universel des ensembles**, qui est le langage même de l'**Univers**. Qu'ils définissent l'**Univers TOTAL**, l'**Ensemble de toutes les choses**, qu'ils le posent comme l'Objet numéro 1 de la Physique ! Puis, l'étape suivante, qu'ils laissent tomber cette chose abominable qu'est la **Négation**, qu'ils raisonnent et fassent maintenant la **Bonne Négation**, la **Négation Relative** (et non plus **Absolue**), à savoir l'**Alternation**. Qu'est-ce que c'est ? Comment ça marche ?

Très simple : cela commence par le fait de se dire que l'**Univers TOTAL** est l'**Ensemble de toutes les choses** donc **toute chose existe** dans l'**Univers TOTAL**. Donc par exemple le boson de Higgs existe dans l'**Univers TOTAL**. Ce qui peut arriver de pire est qu'il n'existe pas dans **NOTRE univers**, exactement comme si l'on cherche un kangourou au fin fond de l'océan Atlantique, on a beau le chercher avec les plus puissants accélérateurs de particules, on ne le trouvera pas, car ce n'est pas son milieu naturel, ce n'est pas son univers normal. Si les poissons font des théories qui les conduisent à postuler l'existence du kangourou, ce n'est pas parce que leurs expériences pour dénicher le kangourou dans l'océan échouent que le kangourou n'existe pas ! Et si leurs expériences les amènent à comprendre que la kangourou a besoin d'air pour respirer qu'il est impossible pour cela qu'il existe dans l'océan, ce n'est pas pour cela qu'il n'existe pas dans l'absolu. Les poissons vraiment intelligents ne font pas de **Négation Absolue**, mais ils raisonnent et disent simplement : « Si le kangourou **n'existe pas** dans notre monde, il **existe** dans un **AUTRE** monde. » Leur négation est toujours tempérée par l'usage du mot **AUTRE** ou **ALTER**, qui laisse une **alternative** ou une **autre possibilité** d'existence de ce qui est **nie**. Ce qui est nié est toujours affirmé d'une **AUTRE** façon, et alors on raisonne avec l'**Alternation** et non plus avec la **Négation Absolue** (après le parcours de la Théorie des Univers, partie A et B, rendez-vous dans la partie C pour en savoir plus sur la **Logique Alternative**…).

Au fur et à mesure que la Théorie universelle des ensembles se développera, l'**alternative** à la **Négation** se révélera aussi, et je la nomme justement l'**Alternation**, son connecteur est le mot « **ALTER** », qui signifie en français « **AUTRE** » et en anglais « **OTHER** » (on comprendra davantage le Problème de la Négation et on découvrira la **Logique Alternative** dans la partie C).

Avant 2003 (l'année de la naissance de l'Axiome universel des ensembles ou Axiome de la Physique), la Théorie des Univers se déroulait donc dans les paradigmes traditionnels, à savoir l'**Axiomatique**, ce qui veut dire aussi que la conception de l'Egalité était celle des mathématiques actuelles, à savoir l'**Identité**, l'égalité de type « **0 = 0** » ou « **X = X** », mais aussi l'usage de la **Négation**, comme on le fait dans les sciences actuelles. Mais à partir de 2003, la lumière est arrivée et la Théorie universelle des ensembles naquit. Les voies de l'abandon des paradigmes traditionnels se sont mises à se dessiner clairement, et une nouvelle méthodologie du traitement des ensembles et des sciences en général a commencer à voir le jour : la **Théorématique**. Sa conception de l'Egalité est l'**Equivalence**, l'égalité de type « **0 = 1** » ou « **X = Y** », associée à l'**Alternation**.

On reparlera de tout cela dans la partie C, je préfère vous réserver le meilleure pour la fin, après vous avoir fait revivre la Théorie des Univers, les « affres de l'accouchement » de la **Théorie universelle des ensembles**, la **Science de l'Univers TOTAL**. Après donc la science douloureuse et ses formules (dans la pure tradition actuelle) qui peuvent être rébarbatives pour vous, la science facile, plus agréable que celle commencée dans cette introduction. En effet, il fallait parler de choses un peu techniques ici parce que c'est l'introduction à la partie technique. Mais après, cette page sera tournée…

Hubert Abli-Bouyo

A – Théorie de 1998

La Théorie des univers

La **Théorie des Univers** permet l'existence et la construction d'un certain type d'ensembles, les **univers**, notés souvent par les lettres **U**, **V**, **W**, …, qui ont la particularité d'être des modèles pour une théorie des ensembles, c'est-à-dire d'être à leur échelle ce que l'**Univers des ensembles**, $\mathcal{U}$, est à son échelle.

Autrement dit, quand on se place dans un univers **U** donné, tout se passe comme dans **U**, en ce sens que l'univers vérifie les axiomes clefs appelés axiomes du **modèle central** ou axiomes du **modèle universel**. Il s'agit des axiomes basiques, minimaux, qu'une collection **U** d'objets doit vérifier pour qu'on puisse appeler ces objets de **U** des **ensembles**, et donc dire que **U** est un **univers des ensembles**, comme $\mathcal{U}$.

La **Théorie des Univers** fut développée de 1998 à 2003, en marge de mon métier d'enseignant de mathématiques et sciences en lycée professionnel, pour apporter une vraie solution aux paradoxes notés dans la théorie des ensembles introduite en 1882 par Georg Cantor.

La **Théorie des Univers** a révélé qu'il n'y avait en fait pas de paradoxes dans la théorie des ensembles de Cantor comme on le pensait, mais le vrai **Paradoxe** est là où on ne le pensait pas : c'était tout simplement le problème de la **Négation**. Quand je faisais cette science en 1998, j'ignorais le problème de la **Négation**, j''utilisais donc le « connecteur de **Négation**» comme on l'utilise maintenant, je raisonnais comme on raisonne maintenant, je niais les choses comme on le fait maintenant. La Théorie des Univers est très intéressante en tant que théorie scientifique selon les paradigmes et la logique scientifique actuels. Comme les vérités scientifiques actuelles, les vérités établies ne sont pas fausses, mais simplement ne sont pas toute la vérité qu'elles auraient dû être si je raisonnais selon la logique d'**Alternation** comme je le fais maintenant en Théorie universelle des ensembles (que l'on a commencé à découvrir dans l'introduction plus haut et comme on le verra dans la partie C). Et d'ailleurs si je raisonnais selon l' **Alternation**, ce ne serait plus la Théorie des Univers, car je ne fais plus la science du tout ainsi, les choses sont infiniment plus simples maintenant dans le nouveau paradigme, on s'est terriblement compliqué la vie avec la **Négation** !

Il n'y a donc pas mort d'homme avec la Théorie de l'Univers faites avec les paradigmes actuels, du moment où l'on comprend maintenant les limites des paradigmes actuels et les améliorations qu'il faut apporter. Les introductions comme l'introduction générale au-dessus et celles spécifiques aux parties sont faites pour recadrer les choses avec le nouveau paradigme, que l'on découvre aussi au fur et à mesure. Et surtout il y a la partie C où toutes les pendules sont remises à l'heure avec la **Théorie universelle des ensembles**.

On bâtit le nouveau en partant de l'ancien, évidemment, c'est d'ailleurs comme cela qu'on découvre encore plus les défauts de l'ancien si l'on s'y prend bien. Et la Théorie de l'Univers a au moins le grand mérite de partir à la découverte d'extraordinaires secrets de l'Univers avec des paradigmes de **Négation** très handicapants, qui ne sont faits pas pour cela, mais qui sont bien au contraire faits pour **nier** ou pour **cacher** à jamais ces vérités. C'est comme réussir à gagner une course de vitesse avec d'énormes boulets (appelés **Négation**) attachés au pieds.

Je ne dis pas cela non plus pour sous-entendre que les performances sont dues à mes capacités propres, mais simplement que la **puissance** vient de l'Objet traité lui-même, en l'occurrence l'**Ensemble de tous les ensembles**, alias l'**Univers TOTAL** l'**Ensemble de toutes les choses**. C'est cet **Objet Surpuissant** que la **Négation** a jeté aux poubelles, et c'est lui que la Théorie de l'Univers est tout simplement en train de réhabiliter en faisant pour l'instant avec les moyens actuels. Car si j'avais les moyens nouveaux à ma disposition, cette théorie ne serait plus nécessaire, puisque son but est justement de parvenir à la découverte de ces moyens… Il contient malgré tout une mine de trésors et de vérités sur les ensembles et sur l'Univers qui ne peuvent pas être appréciés pour ce qu'ils sont simplement parce qu'ils sont exprimés selon les conceptions actuelles. Ces trésors sont donc des vérités nouvelles dans un langage ancien, et demandent donc à être exploités, expliqués, pour comprendre ce qu'ils veulent dire.

Par exemple, derrière le simple énoncé de l'**Axiome des univers** (qui, rappelons-le, est maintenant un théorème dans le paradigme de l'**Univers TOTAL**, une loi établie) à savoir : « ***Tout ensemble appartient à***

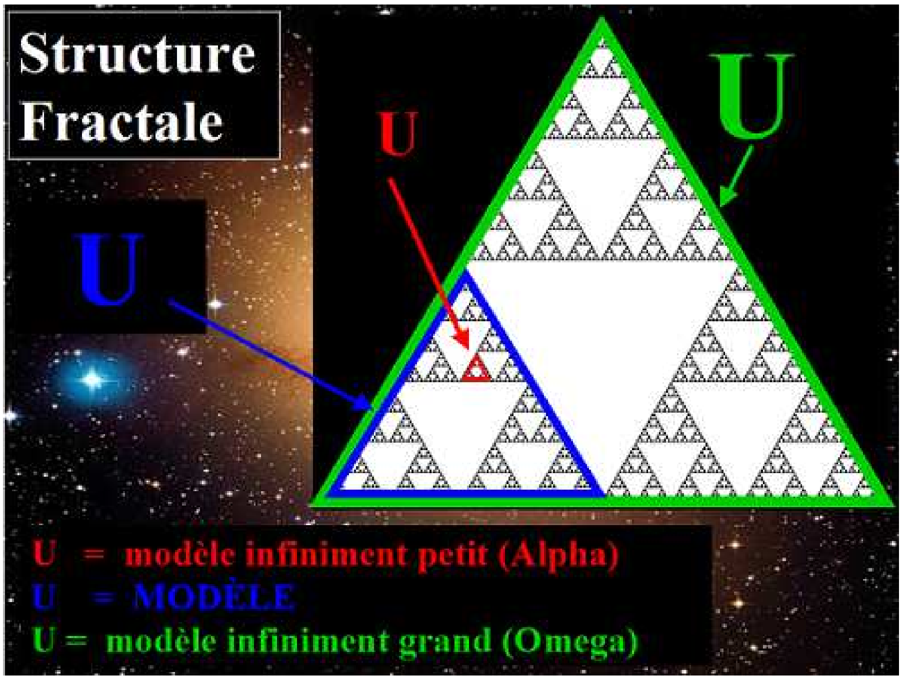
univers » se cachent des vérités inouïes sur l'Univers, que la Théorie des Univers effleure à peine dans ses analyse et les propriétés qu'elle énonce sur les **univers**. Un mathématicien ou même un physicien actuel qui lirait cet axiome tel quel et ses propriétés se dira qu'il a simplement les propriétés d'un objet mathématique, et pourtant c'est complètement autre chose. Quand on a compris que ce sont les univers physiques et leurs structures qui se cachent derrière ces univers mathématiques, on compris qu'un univers $\mathbf{U_0}$ appartient à un univers $\mathbf{U_1}$, qui appartient à un univers $\mathbf{U_2}$, qui appartient à un univers $\mathbf{U_3}$, etc., indéfiniment ! On ne dirait pas ce qu'on dit actuellement en physique sur NOTRE univers (que l'on prend pour la Réalité TOTALE) si l'on avait compris cette simple vérité de la physique exprimée par ce très simple **Axiome des univers**.

En effet, on ne dirait pas les énormes absurdités que l'on enfonce dans les crânes de tout le monde selon lesquelles l' « Univers » (à comprendre donc la Réalité TOTALE) est née il y a seulement environ 14 milliards d'années, et que sa quantité totale de matière ou d'énergie est de $\mathbf{10^{80}}$ atomes. Cela peut paraître énorme pour nos petits cerveaux (ou plutôt pour nos cerveaux bridés par la **Négation**) mais on est infiniment loin de l'**Univers INFINI** que nous enseigne l'**Axiome des univers** ! On parle évidemment seulement de **NOTRE univers** et pas de l'**Univers TOTAL**, qui lui ne peut qu'être **INFINI** ! Rien que pour comprendre cela, ça vaut le coup de lire l'**Axiome des univers** et d'essayer de la comprendre, en faisant simplement gaffe aux choses que j'ai dites et qui reflètent l'énorme emprise de la **Négation** sur nos psychés. Et la Négation en question n'est pas une abstraction mais des humains en chair et en os et des êtres qui **NIENT** l'**Univers TOTAL**, qui nous enferment dans un petit univers de seulement $\mathbf{10^{80}}$ atomes.

Quand depuis son enfance on trempe dans monde de **Négation**, quand la **Négation** est dans le biberon qui nous a nourri (sans que notre mère le sache forcément car elle aussi a été nourrie au lait de la **Négation**), et quand l'on a été imbibé par les sciences de **Négation**, elle laisse ses marques bien évidemment dans la Théorie des Univers destinée à nous débarrasser de cette **Négation** (on verra dans la partie C comment, avec la Théorie universelle des ensembles, passer maintenant de la **Logique de Négation** à la **Logique d'Alternation**).

Quand donc vous lirez la Théorie des Univers, il faut faire simplement attention à tout ce qui implique la **Négation**, ne plus lui donner le caractère **absolu** qu'on lui donne dans les mathématiques et les sciences actuelles (et que je lui donnais aussi à l'époque), mais, comme nous avons commencé à le voir dans l'introduction générale, il faut toujours la **relativiser**, la **modérer**, la **nuancer** maintenant.

Par exemple, quand je parle de l'**Ensemble Vide** ($\varnothing$) et dis que c'est la collection ou l'ensemble qui n'a « **aucun** élément », il ne faut pas oublier que maintenant il faut fonctionner avec comme notion d'égalité l'**Equivalence** et que l'**Ensemble Vide** ($\varnothing$) et l'**Ensemble Plein** (tout simplement l'**Univers des ensembles** $\mathcal{U}$) sont **équivalents**, ce sont simplement deux manières différentes de voir le même ensemble, l'un est le **premier univers** (l'**Alpha**), le plus petit d'entre les univers, et l'autre est le **dernier univers**, tous les univers sont liés dans une **structure FRACTALE**, qui est celle de $\mathcal{U}$, l'**Univers des ensembles**. Et dans une **structure FRACTALE**, tous les modèles sont **équivalents**, pas **identiques** (parce qu'ils diffèrent par leur taille, ils sont imbriqués les uns dans les autres) mais équivalents, ce qui veut dire que chacun, serait-il infiniment petit (**Alpha** ou **Vide**) ou infiniment grand (**Oméga** ou **Plein**) est à son niveau ce que tous les autres sont. Quand on se place dans l'un d'eux, c'est comme le fait de faire un grand zoom sur lui, ou comme le fait de voir dans le lointain de l'espace un point lumineux qui a l'air de Rien ou de Vide, mais qui, dès qu'on s'approche de lui, grossit et se révèle être plus qu'une planète, plus qu'une étoile mais une galaxie voire tout un univers ! Finalement ce qui semblait être Vide d'un certain point de vue (on le voit de loin) devient tout un monde, comme tous les autres mondes. On comprend alors que finalement il n'était pas si Vide que cela, mais la même chose que les autres mondes.



*Il faut maintenant voir les ensembles dans le paradigme de l'**Equivalence**, de la **Structure FRACTALE** et du **Cycle** (on reparlera dans la partie C). Dans ce paradigme on a l'équivalence : **Vide = Plein**, **Alpha = Oméga**, **Zéro = Infini**, etc.*

C'est ainsi qu'il faut comprendre maintenant l'**Ensemble Vide**. Ce qui d'un certain point de vue n'a « **aucun élément** » est pourtant plein d'éléments d'un autre point de vue. Il faut donc **relativiser** la **Négation** d'une manière générale, et en particulier dans les mots à contenu **négatif** comme « **néant** », « **rien**», « **vide** », « **zéro** », « **aucun** », « **jamais** », etc.

C'est en fait la **Négation Absolue** qui est la vraie cause des paradoxes de la théorie des ensembles, car justement les ensembles réclament une logique basée sur l'**Equivalence**, le **Cycle** et la **Structure FRACTALE**, tout simplement la **Logique d'Alternation** dont nous parlerons dans la partie C. C'est une logique très intelligente, très souple et très nuancée dans ses propos et non pas brute, radicale, tranchante, catégorique, comme la **Logique Négative**. Quand la **Logique Alternative** énonce une vérité, elle laisse toujours au moins une microscopique possibilité que le contraire de cette vérité soit vrai aussi, car l'**Univers TOTAL**, l'**Univers FRACTAL**, l'**Ensemble de toutes les choses**, est l'Ensemble dans lequel toutes choses existent et le contraire de toutes choses aussi, tout y est vrai et le contraire de tout aussi.

La Théorie des Univers que nous allons voir maintenant a donc d'abord eu pour simple but de résoudre les paradoxes de la théorie des ensembles, dus en fait à la **Négation**. La mission initiale est donc plus que largement accomplie, puisque cette théorie a permis de faire des découvertes sublimes au-delà de l'objectif initial. Elle nous a conduits à la rencontre très inattendue avec l'**Univers TOTAL**. C'est comme retourner la terre pour trouver des vers de terre pour aller à la pêche avec et tomber sur un grand coffre rempli de diamants et d'un trésor qui a une valeur incalculable…

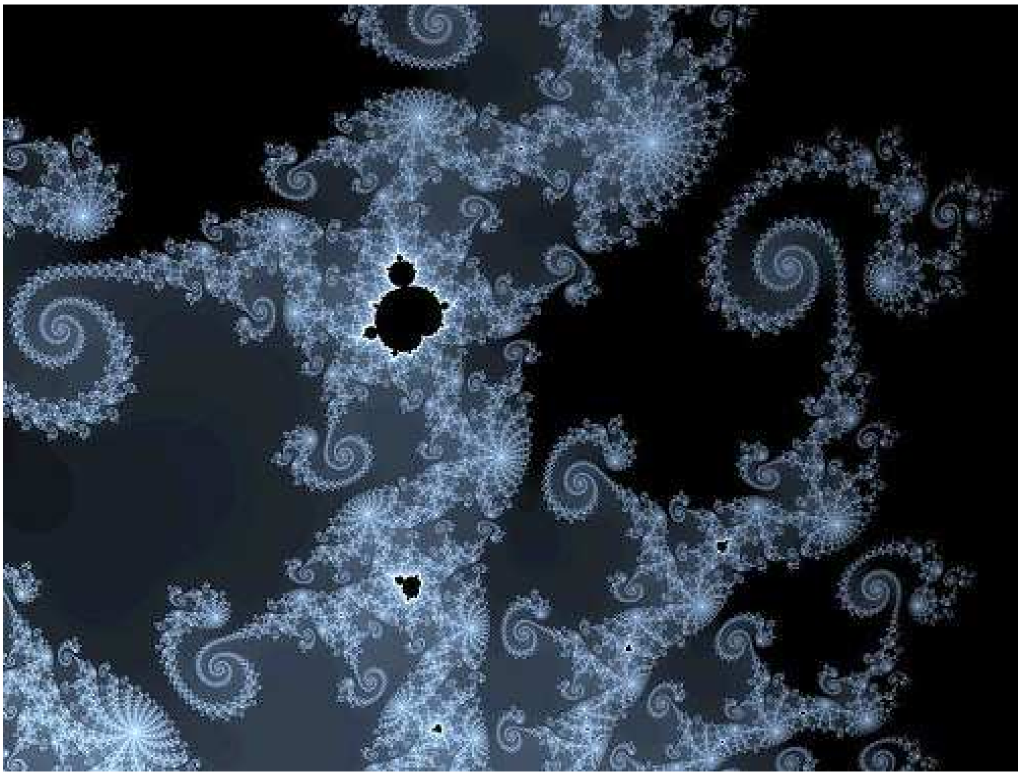
L'**Axiome des Univers** est le point clef de toute la Théorie des Univers, tout prépare les concepts qu'il faut pour définir de manière simple, claire de manière puissante la notion d'**univers**, pour formuler l'**Axiome des Univers**, pour étudier les propriétés des univers. Dans cette partie A, la théorie initiale (celle de 1998), l'**Axiome des Univers** était une version plus forte nommée l'**Axiome des α-univers** (l'**Axiome des alpha-univers**), qui disait après la définition des **α-univers**:
« *Pour tout ordinal α, tout ensemble appartient à un **α-univers***».

C'est tout simplement l'**Axiome des Univers** boosté par les ordinaux. Mais dans la reformulation de la théorie de 2003 avec un nouveau concept appelé le **schème** (partie B), j'ai vraiment pris la mesure la puissance de cet **Axiome des Univers**. Il était si puissant que la version des **α-univers** le compliquaient pour rien, cette version exprimait des choses dont le principal pouvait se déduire avec la version simplifiée de l'axiome :
« *Tout ensemble appartient à un **univers***».

Quelle que soit la formulation de cet axiome clef, ce qu'il faut comprendre sur son sens et son but est ceci : il fait de l'**Univers des ensembles** $\mathcal{U}$ une **structure FRACTALE** ! Comme on le verra en parcourant la théorie, que je ne pas référence à la notion de « structure fractale » dans le plan de travail ni dans les remarques. A l'époque je voyais une structure fractale comme on le voit maintenant, à savoir des propriétés de certains ensembles géométriques ou algébriques qu'il faut définir par des formules algébriques (et en particulier par des nombres complexes, comme par exemple l'ensemble de Mandelbrot:

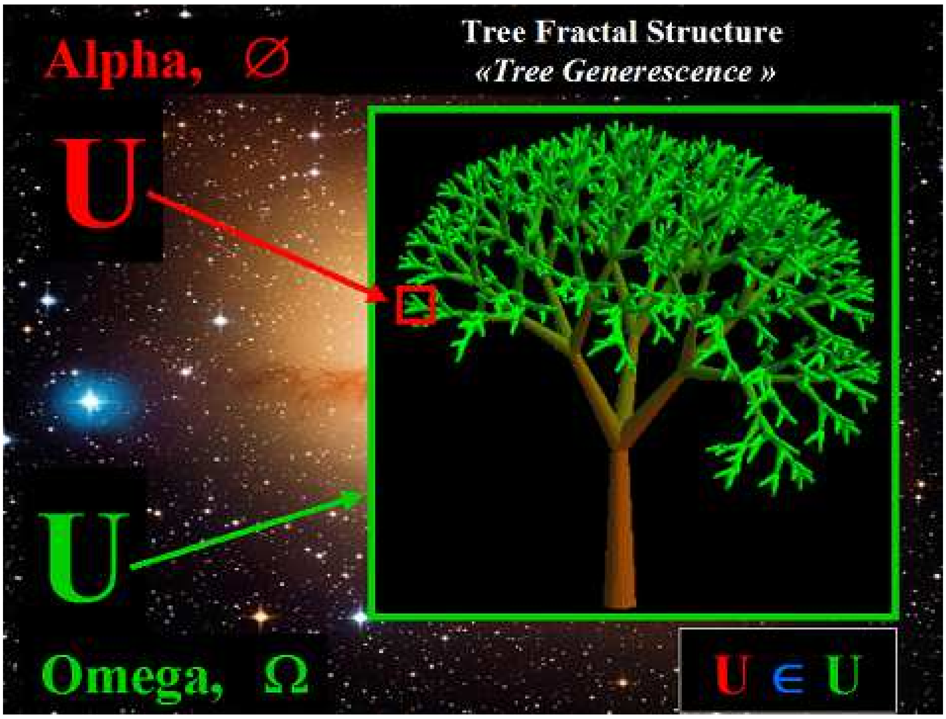
$$\begin{cases} Z_0 = 0 \\ Z_{n+1} = Z_n^2 + c \end{cases}$$

qui est l'ensemble des points *c* du plan complexe tels que la suite précédente (définie par récurrence) ne tend pas vers l'infini en module.



Fractale de Mandelbrot.

Cependant j'avais une intuition claire d'une notion ensembliste de structure FRACTALE (même si je ne nommais pas ainsi l'idée) qui est la notion la plus simple et la plus naturelle qui soit, à savoir la notion d'**Arbre** !



*L'Arbre est sans doute la plus simple et la plus familière des **structures fractales**.*
La version Arbre du Triangle de Sierpinski.
L'Arbre se déploie en trois branches
qui se partagent à leur tour chacune en trois branches, et ainsi de suite.
Autrement dit, cet Arbre a une infinité de petits modèles de lui-même en lui-même.
Chacune des branches est à son niveau ce que l'Arbre tout entier est.

L'**Axiome des Univers** prenait tout simplement une **Arbre** pour modèle naturel. C'est la raison pour laquelle dans le développement le chapitre ***A.III*** sur ***la collection universelle V et le théorème de fondation***, et plus précisément dans sa section ***2.b*** il y a une étude sur l***es branches et arbres de fondation***. Dans les théories des ensembles traditionnelles le rôle et le sens profond de l'**axiome de fondation** sont mal appréhendés. C'est avec les **univers**, ce qui veut dire la **structure fractale** (telle que l'illustre un **Arbre**) que tout le sens de cet axiome apparaît : l'**Univers des ensembles** $\mathcal{U}$ est tout simplement l'**Arbre de tous les arbres**, ses sous-arbres étant simplement les univers que créait l'**Axiome des univers**.

En disant : « ***Tout ensemble appartient à un univers*** », c'est comme de dire cette vérité banale avec un Arbre devant les yeux : « *Tout élément de l'arbre appartient à une branche de l'Arbre* » ou encore : « *Tout élément de l'arbre appartient à un arbre dans l'Arbre*».

Un axiome qui copie simplement et très fidèlement un modèle de la **Nature**, un modèle de l'**Univers**, à savoir l'**Arbre**, n'est pas un **axiome** en fait mais un **théorème** ! Il ne peut qu'être juste. C'est cela donc le but fondamental de l'**Axiome des univers** : il créait tout simplement dans l'**Univers des ensembles** $\mathcal{U}$ des **petits modèles** de lui-même, des **arbres** dans l'**Arbre**, et ces **arbres** petits-modèles de l'**Arbre** sont les **univers**. C'est la feuille de route de la Théorie des Univers que vous allez parcourir, les clefs de sa compréhension. Tous les développements sont la mise au point des outils généraux des ensembles pour atteindre le but : construire la **structure de l'Arbre** (la **structure FRACTALE**) qu'ils réclament. Quand on travaille avec les ensembles dans la pure **abstraction de l'axiomatique** sans être guidé par la logique profonde des ensembles (la **logique FRACTALE**), on se heurte à des propriétés spéciales de cette structure fractale que l'on prend à tort pour des « paradoxes » parce qu'on ne les comprend pas. **Pire**, si parce que l'on ne comprend pas l'Arbre (l'**Ensemble Plein** ou l'**Ensemble de tous les ensembles**) on le **nie** et affirme qu'il ne peut pas exister à cause de ses propriétés jugées « paradoxales », alors on a tout simplement abattu l'Arbre !

Et que fait maintenant la Théorie de l'Univers ? Très simple : il ressuscite l'**Arbre** et lui redonne sa **structure FRACTALE** avec l'**Axiome des univers** ! Vous aurez donc compris que l'abstraction axiomatique de la Théorie de l'Univers n'est qu'une apparence, car tout suit un **modèle physique réel**, celui de l'**Arbre** de l'**Univers** concret, appelé dans cette partie A le **modèle central** ou un **modèle universel**.

La Théorie des Univers nous fait entrer dans les entrailles des ensembles et nous fait comprendre comme cela n'a jamais été fait jusqu'ici ce qu'ils sont vraiment. Ce ne sont pas les objets abstraits des mathématiques et des théories des ensembles actuelles, mais les objets de l'Univers. Dans le Langage universel des ensembles toutes les sciences s'unifient en une seule science : la Science de l'Univers TOTAL. On ne sépare plus les domaines : mathématiques, physique, informatique, biologie, etc. On ne dit plus que les mathématiques s'appliquent à la **physique**, elles ne s'appliquaient pas aux autres sciences. Mais les mathématiques bien faites SONT la **physique**, la **biologie,** la **psychologie**, etc. Finie donc l'époque où il y avait les mathématiques d'un côté, la physique de l'autre, la physique mathématique par ci, la mathématique physique par là, etc. Avec l'**Univers TOTAL** vers lequel nous conduit la Théorie des Univers finie la Tour de Babel des sciences, place à la **Science de l'Univers TOTAL**.

Derrière les manipulations apparemment abstraites qui vont suivre se cachent simplement les vérités profondes de l'**Univers TOTAL**. Il faut maintenant changer complètement de mentalité et voir différemment les choses. Il faut voir toutes les vérités que nous allons établir comme des **lois de la physique**, car derrière chacune d'elles se cache une réalité de l'**Univers TOTAL**..

Théorie de 1998

I. Les axiomes du modèle central

1. Généralités

a. Les notions intuitives de base

Nous abordons cette théorie en considérant quelques notions intuitives. Certaines de ces notions recevront ultérieurement un sens plus précis au sein de la théorie. Ces notions peuvent être réparties en deux catégories qui sont les **objets** et les **relations**. Nous exprimons quotidiennement des relations entre les objets. Par exemple la phrase « *Paul habite à Nantes* » exprime la relation « habiter à » entre les objets Paul et Nantes, qui sont appelés les *paramètres* de l'énoncé. A cette relation on peut attribuer une valeur de vérité *vrai* ou *faux*.

Nous utilisons les objets que sont les **entiers intuitifs** (ou **entiers naturels** ou encore simplement **entiers**). Introduisons des objets appelés **variables** dont le but est de rendre anonymes les objets d'un énoncé. Ce sont les symboles ν_k , où k est un *entier intuitif*, c'est-à-dire ν_0 , ν_1 , ν_2 , ... Les premières de ces variables seront souvent désignées par les lettres x, y, z, t, u, v, w, ... , éventuellement avec un indice entier comme x_0 , x_1 , x_2 , ... Nous introduisons des objets appelés *blancs* et notés $@_0$, $@_1$, $@_2$, ... Nous utilisons aussi la notion de *liste ordonnée* ou *suite*. Une liste ordonnée de n objets, non nécessairement distincts, s'écrira $(a_1 , ... , a_n)$. L'entier n est appelé la *longueur* de la suite. Par exemple on a la suite (*Paul* , *Nantes*) de longueur 2.

b. Les relations

La relation « habiter à » s'écrit à l'aide des blancs « $@_1$ habite à $@_2$ ». L'énoncé « *Paul habite à Nantes* » se notera indifféremment : « $@_1$ habite à $@_2$ » (*Paul*, *Nantes*) ou *Paul* « $@_1$ habite à $@_2$ » *Nantes* .

Il est plus commode de noter R la relation « $@_1$ habite à $@_2$ ». On a alors R(*Paul*, *Nantes*) ou *Paul* R *Nantes*.

L'énoncé R(*Paul*, *Nantes*) n'a pas de variable libre (la notion de variable *libre* se précisera par la suite). On dit qu'il est *clos*. La relation R(x, *Nantes*) a une variable libre, savoir x, et un paramètre, Nantes. On ne peut dire de la relation qu'elle est vraie ou fausse tant qu'on ne sait pas l'objet désigné par x. D'une manière générale, les paramètres d'un énoncé sont les noms d'objets figurant dans cet énoncé. La relation R(x, y) a deux variables libres et est sans paramètres. Étant donné un entier n, on peut avoir une relation à **n variables libres**; on dit aussi relation à *n arguments* ou *n-aire*. L'entier *n* est appelé l'*arité* de la relation.

Si $E(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)$ est un énoncé où $x_1, \ldots, x_n$ sont ses n variables libres et $a_1, \ldots, a_m$ sont m noms d'objets (donc m paramètres), cet énoncé (à n arguments) sera souvent noté en abrégé $R(x_1, \ldots, x_n)$. Il est clair que R désigne alors l'énoncé avec les blancs $E(@_1, \ldots, @_n, a_1, \ldots, a_m)$. On parlera pour simplifier de la relation à n arguments R.

Une relation à un argument R(x) est dite **unaire**. On dira aussi que c'est une *propriété*. Une relation à deux arguments R(x, y) est dite **binaire**. Une telle relation sera très souvent notée x R y.

L'Egalité

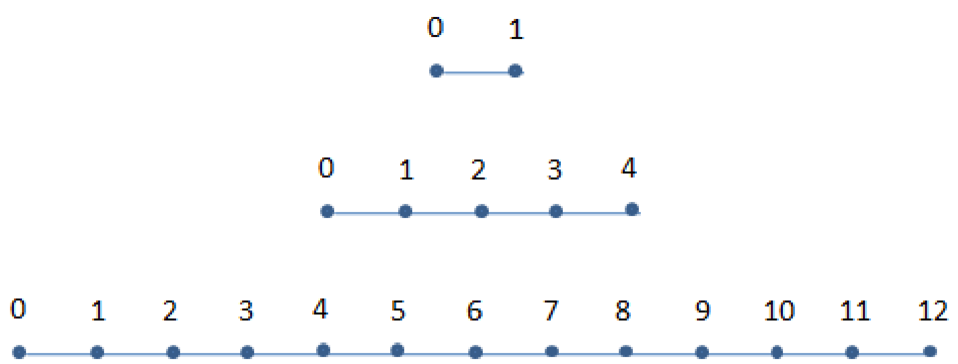
La relation binaire fondamentale est la relation d'égalité $@_0 = @_1$, ou simplement la relation = .
L'énoncé $x = y$ exprime évidemment que x et y désignent le même objet. L'énoncé *x n'est pas égal à y* s'écrira $x \neq y$.

[***NOTE A.I.1.b : note postérieure ajoutée après l'évolution de la présente Théorie des Univers vers la Théorie universelle des ensembles ou Science de l'Univers TOTAL :***

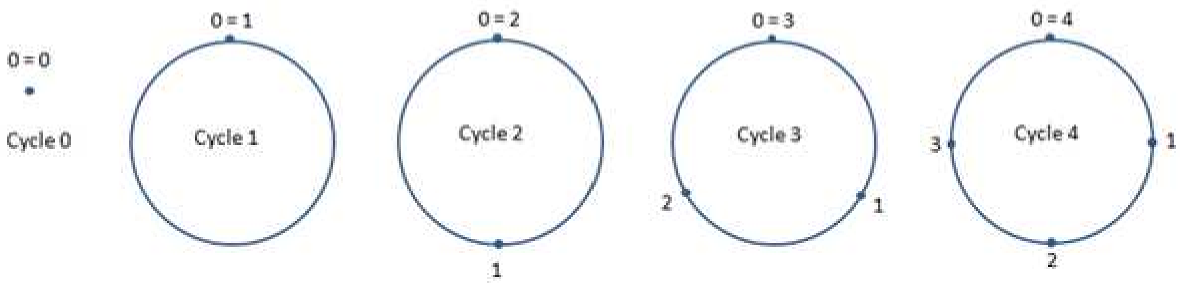
Cette définition de l'égalité fut donnée à une époque où je fonctionnais, comme on le fait maintenant en science et dans le monde, avec une conception de l'égalité qui est principalement l'Identité. La définition que je donne ici de l'égalité et qui est soulignée en rouge est l'Identité, à savoir que « x = y » signifie que « x et y désignent le même objet ». Cela semble normal de définir l'égalité ainsi, comme on le fait actuellement, mais en fait dès lors qu'on a deux noms différents « x » et « y », on parle déjà de deux objets distincts ! Dans ce cas alors, l'écriture « x = y » n'est plus l'égalité au sens de l'Identité mais d'Equivalence.

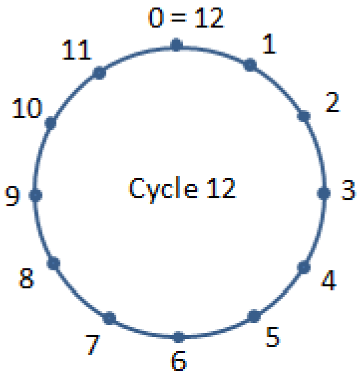
*L'Identité est l'égalité de la forme « x = x », qui signifie qu'on a **un seul objet**, « **x** », qui est lui-même, comme le fait de dire « Paul est Paul » ou « Paul = Paul ». Mais si Paul s'appelle aussi Pierre, si donc l'on a deux noms différents pour la même personne, du coup « Paul = Pierre » n'est plus vraiment l'Identité mais l'Equivalence entre Paul et Pierre. C'est comme aussi dire 4. L'égalité « 4 = 4 » est une identité, celle de 4, mais « 2 + 2 = 4 » n'est pas une identité mais une équivalence entre l'opération d'addition de 2 et 2 et le nombre 4. De même, « 10 = 10 » est l'identité de 10, mais « 4 + 6 = 2 × 5 » n'est pas une identité mais l'équivalence entre une addition d'une part et une multiplication d'autre part, qui donnent le même résultat 10. C'est dans ce cas ce que le signe « = » veut dire. Il est vrai que dans ce cas la distinction entre l'identité et l'équivalence n'est pas très nécessaire, parce que l'on fait juste des opérations et que l'on s'intéresse surtout aux résultats et pas aux opérations en elles-mêmes. Mais si le but de l'étude est surtout les opérations et que l'on ne s'intéresse que dans un second temps au fait de savoir lesquelles donnent le même résultat, alors il est évident qu'on ne peut pas confondre les opérations « 4 + 6 » et «2 × 5 », car ne sont pas du tout les mêmes opérations !*

Si donc je dis « 2 + 2 = 4 » ou « 0 + 0 = 0 », c'est une équivalence que l'on peut appeler aussi une identité, parce qu'elle revient à dire « 4 = 4 » ou « 0 = 0 », qui est l'identité proprement dite, l'égalité associée à la Droite : « 0 = 0 », « 1 = 1 », « 2 = 2 », « 3 = 3», « 4 = 4», « 5 = 5 », etc., l'égalité des nombres conçus comme des segments, dont les deux extrémités ne se rejoignent pas pour devenir le même point, le même objet, la même chose :



Mais si je dis « 2 + 2 = 5 », ou« 0 + 0 = 1 » c'est toujours une équivalence, celle qui peut encore s'écrire « 0 = 1 », mais qui n'est plus une identité, car elle n'est plus une égalité de la forme « x = x» mais de la forme « x = y ». Au sens de l'identité (qui est la conception actuelle de l'égalité), on dira que « 4 = 5 » est faux, et on écrira « 4 ≠ 5 », alors que c'est vrai au sens de l'équivalence. Voilà donc toute l'importance de la nouvelle conception de l'égalité, à savoir l'équivalence, l'égalité associée au Cercle ou au Cycle : « 0 = 0 », « 0 = 1 », , « 0 = 2 », « 0 = 3», « 0 = 4», « 0 = 5 », etc., l'égalité des nombres entiers conçus cette fois-ci comme des cercles, dont les deux extrémités se rejoignent maintenant pour devenir le même point, le même objet, la même chose :





On fonctionne actuellement avec l'Identité et on voit l'Equivalence simplement comme une généralisation de l'« égalité », alors qu'en fait c'est l'inverse qu'il faut faire : l'égalité est l'équivalence, on doit fonctionner et raisonner en termes d'équivalence, et voir l'identité comme un cas particulier d'équivalence. En effet, on voit bien avec cette illustration des nombres entiers conçus comme des cercles, que qui dit Equivalence, dit aussi forcément l'Identité « 0 = 0 » ou Cycle 0, qui en est un cas particulier. Il faut maintenant comprendre l'égalité au sens de l'Equivalence, relation d'équivalence qui sera définie plus loin.

*Dans le paradigme de l'Equivalence, l'Identité et l'Equivalence deviennent **équivalentes**, ce sont deux façons différentes de parler de la seule et même Egalité, exactement comme dans ce paradigme le Zéro et l'Infini ne sont que deux manières différentes de dire la même chose. L'Identité a son utilité, qui est d'engendrer la **Diversité** ou de la garantir en évitant la confusion des identités, donc une mauvaise égalité entre les choses.*

*Mais l'**Unité** est aussi très importante, oui l'Unité des choses différentes, la l'**Unité dans la Diversité** et la **Diversité dans l'Unité** ! Et c'est justement l'**Univers TOTAL**, l'**Ensemble de toutes les choses**, l'**Ensemble de tous les ensembles**, qui réalise cette **Unité**, c'est lui le grand trait d'**Union** entre toutes les choses, il est leur **Réunion**, leur **Intersection**. Quand donc l'Identité est poussée trop loin jusqu'à devenir absolue, elle se transforme en **Séparation absolue** des choses, chacune n'étant désormais égale qu'à elle-même, chacune niant l'**Unité** avec toutes les autres choses et avec l'**Univers TOTAL**, **Unité** due leur appartenance commune à l'**Univers TOTAL**. La relation entre les choses est alors coupée, car justement cette relation fondamentale est l'Equivalence ! Et du coup aussi, du fait de cette séparation à outrance entre les choses, l'Identité et l'Equivalence sont séparées, elles ne sont plus équivalentes, donc ne fonctionnent plus en harmonie comme cela se doit. Elles ne sont plus deux sœurs complices et complémentaires, mais deviennent deux ennemies antagonistes.*

Mais quand justement on se place dans le paradigme de l'Equivalence, l'équivalence entre les deux est de nouveau rétablie. « 0 = 0 » n'exclut plus « 0 = 1», de même que « 0 = 1» n'a jamais exclu « 0 = 0 », puisque qui dit « 0 = 1» dit forcément aussi « 0 = 0 » et « 1 = 1». En effet, « Il faut déjà être soi-même avant d'être quelqu'un d'autre »…

C'est l'occasion aussi de dire que l'Identité (le « 0 = 0 » qui exclut « 0 = 1») est synonyme aussi d'une mauvaise conception de la ***Négation****, une* ***Négation Absolue*** *: les choses ne sont égales qu'à elles-mêmes, donc toute égalité avec les autres choses est* ***niée dans l'absolu****. Autrement dit, une chose* ***x*** *n'est qu'elle-même, et si* ***y*** *est une chose différente de* ***x****, alors* ***x*** *n'est pas* ***y*** *, c'est-à-dire «* ***x NON est y*** *» , qui s'écrit «* $\boldsymbol{x \neq y}$ *». Autrement dit, avec l'Identité, la* ***Différence*** *entre x et y implique automatiquement l'****Inégalité*** *entre x et y, ou le* ***NON-être*** *entre x et y (****x n'est pas y*** *et* ***y n'est pas x****).*

Mais l'Equivalence consiste à dire que deux choses différentes x et y peuvent pourtant être le même être ! Autrement dit, x et y peuvent être deux manières différentes de parler d'un même être z, qui EST donc x et qui EST aussi y. C'est en raison de cette vérité très profonde que l'on peut dire : « 4 + 6 = 2 × 5 », alors qu'il s'agit de deux opérations bien différentes ! Mais ces deux choses différentes peuvent désigner le même être, en l'occurrence ici 10. C'est ainsi que bien que différents, 0 et 1 sont quelque part le même être, ce que veut dire l'équivalence « 0 = 1 » . L'être en question qui est à la fois 0 et 1, à la fois l'ordinal fini 0 et l'ordinal infini ω *(on comprendra quand on abordera les ordinaux). Bref, l'être par excellence qui est à la fois x et y , est l'Univers TOTAL, l'Ensemble de toutes les choses. C'est lui en fait que nous appelions la « collection* $\mathcal{U}$*. des ensembles » dans la présente Théorie des Univers. C'est l'Univers des ensembles, l'Ensemble de tous les ensembles dont l'existence est impossible quand on fonctionne avec une notion d'égalité qui est l'Identité au lieu de l'Equivalence. Autrement dit quand on fonctionne avec une* ***Négation Absolue*** *au lieu d'une* ***Négation Relative****. La* ***Négation Relative*** *est appelée l'****Alternation****, dont nous parlerons dans la partie C de ce document. Elle est à différencier de la* ***Négation Absolue****, la* ***Négation*** *proprement dite.*

A l'époque de la Théorie des Univers, la ***Négation*** *n'était pas identifiée comme un problème fondamental pour la science, pour la pensée et pour le monde. Il faut maintenant faire attention à la* ***Négation****, il faut beaucoup relativiser la* ***Négation****, comme celle contenue ici dans l'écriture « 0 ≠ 1» ou dans la phrase « 0 n'est pas 1 » ou encore « 0 n'est pas égal à 1 ». Avec l'Equivalence et l'Alternation,* ***différencier les choses*** *(car il est important de les* ***différencier****) ne signifie plus obligatoirement* ***nier l'être des choses****. Changer la conception de l'****Egalité*** *en passant de l'actuelle Identité à l'Equivalence, c'est changer d'****ontologie****, c'est passer de celle de l'Identité à celle de l'Equivalence… En d'autres termes, c'est abandonner l'ontologie d'Aristote et son fameux « principe de non-contradiction », qui telle qu'il est formulé, est en fait le principe de la* ***Négation absolue****…*

« Il est impossible qu'un même attribut appartienne et n'appartienne pas en même temps et sous le même rapport à une même chose » (Aristote, Métaphysique, 1005 b 19-20).
C'est très exact, cher Aristote, mais à condition que la ***Négation*** *contenue dans le mot «* ***impossible*** *» ou dans la partie de la phrase «* ***n'appartienne pas*** *» ne soit pas* ***absolue*** *mais juste* ***relative****, ou que l'****Egalité*** *ou l'****Ontologie*** *associée au mot «* ***même*** *» ne soit pas l'****Identité*** *mais l'****Equivalence****.*]

Les permutations d'une relation, la relation réciproque d'une relation binaire

Si $R(x_1, \ldots, x_n)$ est une relation à n arguments ou n-aire, on obtient une autre relation à n arguments en effectuant une permutation sur l'ordre des variables. Les relations ainsi obtenues sont appelées les *permutations* de $R(x_1, \ldots, x_n)$. Par exemple si $R(x, y)$ est une relation binaire, $R(y, x)$ désigne une autre relation binaire $R'(x, y)$. Les relations binaires R et R' sont alors dites *réciproques*. On a pour deux objets a et b, $R(a, b) \Leftrightarrow R'(b, a)$.

Un exemple familier de relations réciproques est le couple de relations «< » et « > », respectivement l'infériorité et la supériorité. On a : $a < b \Leftrightarrow b > a$.

La relation d'égalité est sa propre réciproque : $a = b \Leftrightarrow b = a$.

Les permutations d'une relation, la relation réciproque d'une relation binaire

Soit $R(x, x_1, \ldots, x_k)$ une relation à k+1 arguments. Il est clair que la relation « *il existe x tel que* $R(x, x_1, \ldots, x_k)$», qu'on notera $\exists x\, R(x, x_1, \ldots, x_k)$, est une relation à k arguments, ses variables libres étant $x_1, \ldots, x_k$. On dit que la variable *x* est *liée* et rendue *muette* par le quantificateur existentiel « *Il existe* » ou « ∃». Cela diminue l'arité de la relation d'une unité, la faisant passer de k+1 à k.

Il en est de même pour la relation « *pour tout x ,* $R(x, x_1, \ldots, x_k)$», notée $\forall x\, R(x, x_1, \ldots, x_k)$. La variable x est cette fois-ci rendue liée et muette par le quantificateur universel « *Tout* », « *Pour Tout* » ou « *Quel que soit* », ce qui fait ici aussi que l'arité de la relation de départ passe de k+1 à k.

Les relations de ce type impliquant les quantificateurs existentiel et universel, ∃ et ∀, seront détaillées plus loin avec les formules.

2. Notion de collection. Axiome d'extensionnalité

a. Relation d'appartenance. Notion de collection. Collection vide

Soit $R(x_1, ..., x_n)$ une relation à n arguments. Si $s = (a_1, ..., a_n)$ est une suite de n objets, alors l'énoncé $R(a_1, ..., a_n)$ est clos. On écrira $\mathbf{(a_1, ..., a_n) \in R(@_1, ..., @_n)}$, ou $\mathbf{(a_1, ..., a_n) \in R}$, pour signifier que l'énoncé $R(a_1, ..., a_n)$ est vrai. On dira que $R = R(@_1, ..., @_n)$ est la **collection** à n arguments *définie* par la relation n-aire $R(x_1, ..., x_n)$. On définit ainsi une nouvelle *relation binaire*, la relation d'**appartenance** $\in$ entre la suite s et la relation R, prise cette fois comme un objet, autrement dit R est un paramètre dans l'énoncé $s \in R$.

On dira alors que « s *appartient* à la collection R » ou que « s est un *élément* de R ». La réciproque de $\in$ est notée $\ni$. $\mathbf{x \ni y}$ se lit « x contient y ». L'énoncé « *x n'appartient pas à y* » s'écrira $\mathbf{x \notin y}$.

<u>*Remarque:*</u>
On réservera le terme *collection* au cas d'une relation unaire R(x). On a dans ce cas : $x \in R \Leftrightarrow R(x)$
Pour cette raison, on parlera souvent abusivement de la collection R(x) pour signifier la collection R définie par R(x). Cependant, les énoncés $x \in R$ et $R(x)$, bien que logiquement équivalentes, ne sont pas identiques. En effet, dans « $x \in R$ » , R est un paramètre tandis que R(x) peut ne posséder aucun paramètre. Par exemple considérons l'énoncé $x = x$ à une variable libre. Il définit le symbole $@_1 = @_1$, noté R. R(x) désigne donc l'énoncé sans paramètres $x = x$, tandis que $x \in R$ désigne l'énoncé $x \in$ « $@_1 = @_1$ » , dont le paramètre est l'objet « $@_1 = @_1$ » .

[***NOTE A.1.2.a.i : note postérieure ajoutée après l'évolution de la présente Théorie des Univers vers la Théorie universelle des ensembles ou Science de l'Univers TOTAL** :*

*Après la relation d'**égalité**, la relation d'**appartenance** est la deuxième relation fondamentale dans la **théorie des ensembles**, ce qui veut dire aussi dans la **Science de toutes les choses**, puisque **toute chose est un ensemble**, au sens maintenant universel du terme **ensemble**, celui de la **Théorie universelle des ensembles** ou **Science de l'Univers TOTAL**.*

*Cette définition de la relation d'appartenance fut donnée dans les paradigmes anciens, les paradigmes de l'**Identité** et de la **Négation**. Même dans ces paradigmes, cette définition est déjà la plus profonde, la plus fondamentale, la plus universelle, la plus puissante, puisqu'elle permet de comprendre que n'importe quelle relation **R** et quelle que soit son arité, équivaut fondamentalement à une relation d'**appartenance**. Et il ne reste maintenant plus qu'à comprendre que n'importe quelle relation d'appartenance équivaut à …une relation d'**équivalence** ou d'**égalité**, pour avoir compris le secret de toutes les relations dans l'**Univers** , autrement dit les relations dans l'**Univers TOTAL**.*

*En effet, pour une **relation** ou une **collection R** (maintenant on ne casse plus la tête en séparant **collection** et **ensemble**, mots qui, à la lumière du paradigme de l'Equivalence, sont comme **cochon** et **porc**, car ils sont évidemment équivalents, deux mots différents pour dire fondamentalement la même chose. son dit simplement ensemble)*

*à une époque où la **Négation** n'était pas identifiée comme un problème fondamental pour la science, pour la pensée, pour le monde. Comme expliqué avec la relation Il faut maintenant relativiser la **Négation** contenue dans « x n'appartient pas à y». D'une manière générale, il faut faire attention à la **Négation** partout où elle s'exprime . Il faut veiller à la relativiser,*]

Collection vide.

Soit la collection v définie par : $x \in v \Leftrightarrow x \neq x$. Comme aucun objet x ne satisfait $x \neq x$, v n'a donc aucun élément. Elle est dite **vide**.

[*NOTE A.1.2.a.ii : note postérieure ajoutée après l'évolution de la présente Théorie des Univers vers la Théorie universelle des ensembles ou Science de l'Univers TOTAL* :

Cette définition fut donnée à une époque où la ***Négation*** *n'était pas identifiée comme un problème fondamental pour la science, pour la pensée, pour le monde. Il faut maintenant relativiser la* ***Négation*** *contenue dans le mot « vide » et dans les phrase comme «* ***aucun*** *objet x ne satisfait $x \neq x$». D'une manière générale, il faut faire attention à tout ce qui se rapporte à la* ***Négation****.*]

b. Relation d'inclusion. Axiome d'extensionnalité.

Soient deux collections r et r' . On dit que r est **incluse** dans r' ou que r est une **partie** de r' ou encore que r est une *sous-collection* de r', et on note $r \subset r'$, si pour tout objet x , $x \in r \Rightarrow x \in r'$.
Si $r \neq r'$, alors on dit que r est une partie *stricte* de r'. On vient donc d'introduire la relation d'*inclusion* $\subset$, dont la réciproque sera notée $\supset$. $x \supset y$ se lit « x inclut y ».

On introduit maintenant l'axiome:
Soient deux collections r *et* r' . Si $r \subset r'$ *et* $r' \subset r$, *alors* $r = r'$.

Autrement dit, deux collections ayant les mêmes éléments sont égales. On en déduit immédiatement qu'il n'existe qu'une seule collection vide. En effet, si v et v' sont deux collections vides, on a pour tout objet x ,
$x \in v \Leftrightarrow x \neq x \Leftrightarrow x \in v'$, donc $v \subset v'$ et $v' \subset v$, d'où $v = v'$.

La collection vide est notée $\varnothing$. Il est clair que pour toute collection r , on a $\varnothing \subset r$.

En effet, on a toujours : $x \neq x \Rightarrow x \in r$, c'est-à-dire donc : $x \in \varnothing \Rightarrow x \in r$.

3. La collection des ensembles. Axiome de l'ensemble vide. Axiome de l'ensemble des parties.

a. Le paradoxe de Russell

Soit la collection c définie par : $x \in c \Leftrightarrow x \notin x$. Est-ce que $c \in c$? Il est clair qu'on a : $c \in c \Leftrightarrow c \notin c$, ce qui constitue le célèbre paradoxe de Russell.

Quel enseignement tirer de ce paradoxe ? On peut considérer qu'il signifie que c n'existe pas. Or par définition, c n'est rien d'autre que le symbole $@_1 \notin @_1$, dont on peut difficilement dire qu'il n'existe pas. c existe tout autant que l'énoncé $x \notin x$. Le vrai problème réside ailleurs. Ce paradoxe peut être appelé le théorème 0 de la théorie des théories. Il signifie qu'il n'existe pas de théorie de *tous* les objets concevables. Les objets de la pensée ne peuvent être enfermés dans un cadre définitif, de sorte que les activités futures de l'esprit se réduisent à un simple jeu de déductions. Quelle que soit la théorie considérée, il y aura toujours des êtres de la pensée, comme ici la collection c, extérieurs à cette théorie.

Le début de la présente théorie laissait implicitement penser que nos propos englobaient *tous* les objets donc c, d'où le paradoxe.

[***NOTE NOTE A.1.3.a : note postérieure ajoutée après l'évolution de la présente Théorie des Univers vers la Théorie universelle des ensembles ou Science de l'Univers TOTAL*** *:*

Cet enseignement indiqué en rouge fut tiré à une époque où la ***Négation*** *n'était pas identifiée comme la cause profonde de tous les paradoxes. Quand le vrai coupable, la* ***Négation****, aura été identifié, il apparaîtra bien évidemment que la théorie de toutes les théories existe, et cela s'appelle la* ***Théorie universelle des ensembles*** *ou* ***Science de l'Univers TOTAL****, l'aboutissement de la* ***Théorie des Univers****. Mea Culpa pour cet aveuglément de l'époque dû à la* ***Négation*** *avec laquelle je travaillais, piège dans lequel sont tombés aussi tous les scientifiques sincères de tous les temps qui cherchaient la vérité…*]

b. La collection $\mathcal{U}$ des ensembles

L'univers de nos propos est la collection $\mathcal{U}$ que nous introduisons et dont les éléments *sont eux-mêmes des collections* appelées **ensembles**. Nous imposons à $\mathcal{U}$ d'être *transitive*, c'est-à-dire que tout élément de $\mathcal{U}$ est une *partie* de $\mathcal{U}$.

Les *seules* collections que nous aurons à considérer sont donc des *parties* de $\mathcal{U}$. Il s'en suit qu'une collection est un ensemble si et seulement si elle appartient à une autre collection. Une collection qui n'est pas un ensemble sera appelée **transcollection**. C'est le cas de la collection c définie par $x \in c \iff x \notin x$, dont il a été question ci-dessus. c est donc la collection des éléments de $\mathcal{U}$ n'appartenant pas à eux-mêmes. Loin d'affirmer que cette collection n'existe pas dans l'absolu, le paradoxe de Russell affirme simplement que c ne peut exister dans $\mathcal{U}$, donc n'est pas un ensemble.

Nous continuerons à utiliser certaines collections apparemment étrangères à $\mathcal{U}$, comme par exemple la collection des *entiers*, la collection des *variables* ou la collection des *énoncés*. Mais, comme on le verra par la suite, il est facile de construire dans $\mathcal{U}$, moyennant ses axiomes, des "équivalents" de ces collections. Du reste l'usage des collections n'est nullement indispensable au développement de cette théorie. Elles ont un intérêt essentiellement pratique pour l'exposé de la théorie, entre autres, elles permettent de formuler certains résultats dans toute leur généralité.

c. Formules et énoncés

i. Formules sans paramètres

Nous allons préciser ici les relations ou énoncés sans paramètres, puis les relations avec paramètres que nous considérerons dans cette théorie.

On considère d'abord les relations binaires de la forme $x = y$ ou $x \in y$ dans lesquelles x et y parcourent les variables $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, ... De telles relations sont appelées *formules atomiques*. La collection de ces formules est notée $\mathcal{F}_0$.
n étant un entier et R une formule, on dira que R est une formule de la collection $\mathcal{F}_{n+1}$ si R est une formule de la collection $\mathcal{F}_n$ ou si l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :

1. R est **non** (R') , où R' est une formule de la collection $\mathcal{F}_n$.
2. R est (R_1) **ou** (R_2) , où R_1 et R_2 sont des formules de la collection $\mathcal{F}_n$.
3. R est $\exists v$ (R') , où v est une variable et R' est une formule de la collection $\mathcal{F}_n$ dans laquelle éventuellement v est une variable libre.

Les relations ainsi définies sont sans paramètres. On les appellera **formules**. D'après cette définition par récurrence des formules, si une relation est de la collection $\mathcal{F}_n$, elle est aussi de la collection $\mathcal{F}_m$, avec $m > n$. On appellera *longueur* d'une relation R *le plus petit* entier k tel que R soit de la collection $\mathcal{F}_k$. La longueur des relations atomiques est 0. La collection des formules est notée $\mathcal{F}$.

En principe, les signes de parenthèses " (" et ") " font partie intégrante de la définition de l'écriture des relations. Cependant, en pratique, lorsque aucune ambiguïté n'est à craindre, on omettra certaines parenthèses pour alléger l'écriture. Par exemple,
$[(x\in y)$ **ou** $(x\in z)]$ **ou** [**non** $(x\in t)$] s'écrira plus simplement $(x\in y$ **ou** $x\in z)$ **ou** [**non** $(x\in t)$] ou encore
$x\in y$ **ou** $x\in z$ **ou** [**non** $(x\in t)$].

Il est aussi très commode d'utiliser les simplifications suivantes:
Si A et B sont des relations,

- **non** [(**non** A) **ou** (**non** B)] est notée A **et** B
- (**non** A) **ou** B est notée $A \Rightarrow B$
- $(A \Rightarrow B)$ **et** $(B \Rightarrow A)$ est notée $A \Leftrightarrow B$.
- **non** [$\exists x$ (**non** A)] est notée $\forall x$ A.

ii. Formules avec paramètres

Les énoncés (ou formules) avec paramètres sont ceux obtenus à partir d'une formule sans paramètres en remplaçant un certain nombre de ses variables libres par des noms d'ensembles. Autrement dit, étant donnés des deux entiers k et m, une formule E(x_1 , ... , x_k , x_{k+1} , ... , x_{k+m}) à k+m variables libres, et a_1 , ... , a_m m ensembles, l'énoncé E(x_1 , ... , x_k , a_1 , ... , a_m) a k variables libres (ou k arguments) et m paramètres.

Par exemple, la formule ∃t [(t = x **et** x∈ y) **ou** y∈ z] possède trois variables libres x , y et z. Soit un ensemble a. L'énoncé ∃t [(t = x **et** x∈ a) **ou** a∈ z] possède deux variables libres x et z et un paramètre a.
On rappelle que si on remplace ainsi toutes les variables libres d'un énoncé par des paramètres, on obtient un énoncé clos. Cependant un énoncé clos peut être sans paramètres. Par exemple l'énoncé ∀x ∃y ∀z [z∈ y ⇔ ∀t (t∈ z ⇒ t∈ x)] sans paramètres est clos. On le retrouvera sous le nom de l'*axiome de l'ensemble des parties*.

Les abréviations suivantes sont quelquefois utiles :

C(x) étant une formule à une variable libre appelée "condition sur le quantificateur" et P un énoncé ,

∃x [C(x) **et** P] est aussi noté [∃x | C(x)] P , lire « il existe x vérifiant C(x) tel que P » .
De même, ∀x [C(x) ⇒ P] est aussi noté [∀x | C(x)] P , lire « quel que soit x vérifiant C(x) , P » .

Si A est une collection, alors ∃x (x ∈ A **et** P) est noté (∃x ∈ A) P ou encore (∃x | A) P .
De même, ∀x (x ∈ A ⇒ P) est noté (∀x ∈ A) P ou encore (∀x | A) P .

<u>*Remarque :*</u>
Il est clair que A est un paramètre des énoncés (∃x | A) P et (∀x | A) P. Et puisque nous ne considérons que les énoncés dont les paramètres sont des ensembles, si la collection A n'est pas un ensemble, alors ces énoncés désigneront respectivement [∃x | A(x)] P et [∀x | A(x)] P , où A(x) est l'énoncé à une libre définissant la collection A. Il est clair que les paramètres de [∃x | A(x)] P et [∀x | A(x)] P sont tous des ensembles car c'est le cas pour A(x).

iii. Énoncés restreints à une collection

Étant donnés une collection Y définie par un énoncé à une variable libre Y(x) et un énoncé E *dont tous les paramètres sont des éléments de* Y, la *restriction* de E à Y , notée E^Y , est l'énoncé obtenu en remplaçant partout dans E ∃x par ∃x |Y(x) , ce qui entraîne que ∀x est remplacé par ∀x |Y(x) .

Il est clair que :
- Si E ne comporte pas de quantificateurs (c'est-à-dire les symboles ∃ et ∀) , alors E^Y est E lui-même.
- Si E est **non** F , alors E^Y est **non** F^Y .
- Si E est F **ou** G , alors E^Y est F^Y **ou** G^Y .
- Si E est ∃x F , alors E^Y est ∃x (Y(x) **et** F^Y) , soit [∃x |Y(x)] F^Y. Ce qui entraîne que
  si E est ∀x F , alors E^Y est ∀x (Y(x) ⇒ F^Y) , soit [∀x |Y(x)] F^Y.

Il est clair aussi que le fait de restreindre nos propos à la collection $\mathcal{U}$ des ensembles signifie que pour tout énoncé E, $E^{\mathcal{U}}$ est E lui-même. Ainsi $\mathcal{U}$ est la collection définie par x = x .
De même, ∃x et ∀x sous-entendent respectivement ∃x ∈ $\mathcal{U}$ et ∀x ∈ $\mathcal{U}$.

c. Subéléments d'une collection. Collections transitives. Clôture transitive d'une collection

Définition
On dira de la collection A qu'elle est **transitive** si tout élément de A est une partie de A.

Lemme
Étant donnée une collection A, les éléments de A (s'ils existent), sont aussi des ensembles.

En effet, $\mathcal{U}$ étant transitif, A est une partie de $\mathcal{U}$ Les éléments de A sont donc des éléments de $\mathcal{U}$, donc sont des ensembles.

Définition

Soit une collection A. On dit que A est le **subélément** d'ordre 0 de A. Pour un entier n, on dira qu'un ensemble a est un subélément d'ordre n+1 de A si a est un élément d'un subélément d'ordre n de A. Tout subélément de A autre que A est appelé un **subélément strict** de A. Il est clair que la collection des subéléments stricts de A est une collection transitive. On l'appelle la **clôture transitive** de A et on la note **Cl(A)**.

- THÉORÈME 1

Si A est une collection *transitive*, alors A satisfait l'*axiome d'extensionnalité*, autrement dit, si a et b sont deux éléments de A ayant *les mêmes éléments dans* A, alors a = b.

En effet, A étant transitive, tous les éléments de a et b sont dans A. Donc si a et b ont les mêmes éléments dans A, ils ont tout simplement les mêmes éléments en tant que collections. L'axiome d'extensionnalité imposé aux collections implique donc que a = b. En particulier avec A = $\mathcal{U}$, on le

- THÉORÈME 2 : **Théorème d'extensionnalité pour les ensembles**.

Si deux ensembles a et b ont les mêmes éléments, alors a = b.

Formule : $\forall x\, \forall y\, [\, \forall z\, (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y\,]$

d. Axiome de l'ensemble vide

La collection $\mathcal{U}$ n'aura un intérêt que s'il existe au moins un ensemble, ce qui est assuré par l'axiome suivant :

- AXIOME : **Axiome de l'ensemble vide.**

Il existe un ensemble n'ayant aucun (ensemble comme) élément.
Formule : $\exists x\, [\, \forall y\, (y \notin x)\,]$

Si v un ensemble n'ayant aucun ensemble comme élément, alors v ne possède aucun autre objet a comme élément, car alors d'après le lemme précédent , a serait un ensemble, ce qui est contradictoire. Donc v = ∅. Il n'existe donc qu'un seul ensemble vide.

∅ sera aussi noté **0**.

e. Paire et singleton

Soient deux *ensembles* a et b et la collection p définie par : $x \in p \Leftrightarrow x = a$ **ou** $x = b$. Cette collection est appelée *paire* (au sens large) et on la note {a , b }. C'est une paire au sens strict si $a \neq b$. Si a = b , on la note alors {a } et on l'appelle *singleton*.
On ne peut pour l'instant pas affirmer que pour des ensembles a et b , la paire {a , b } est un ensemble :

f. Axiome de l'ensemble des parties

Étant donné un ensemble a , il existe un ensemble dont les éléments sont les ***ensembles*** *inclus dans a.*

Cet ensemble est noté **$\mathcal{P}$(a)**.
Formule: $\forall x\, \exists y\, \forall z\, [z \in y \Leftrightarrow (\forall t \in z)(t \in x)]$

- Pour tout ensemble a, comme $\emptyset \subset a$, on a donc $\emptyset \in \mathcal{P}(a)$. En particulier $\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$. Or ∅ est la seule partie de ∅. Donc $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ noté **1**. Il est clair aussi que $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0 , 1\}$ noté **2**. On dispose donc ainsi d'une première paire.

4. Relations fonctionnelles. Schéma de remplacement

a. Relations fonctionnelles

i. Définition

Soit $R(x_1, \ldots, x_k, y)$ une relation à k+1 arguments. On dit que cette relation est *fonctionnelle à k arguments (par rapport à la variable y)* , si :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \forall y \forall y' [R(x_1, \ldots, x_k, y) \textbf{ et } R(x_1, \ldots, x_k, y') \Rightarrow y = y']$$

Il est alors d'usage d'introduire un nouveau symbole F et de noter la relation $y = F(x_1, \ldots, x_k)$. F est appelé une **fonction** *à k arguments.* Les paramètres de R sont aussi appelés les *paramètres de F*.
La collection définie par la relation à k arguments : $\exists y\, [y = F(x_1, \ldots, x_k)]$ est appelée le **domaine** de R (ou encore de F) , et on le note **Dom F**. La collection : $\exists x_1 \ldots \exists x_k\, [y = F(x_1, \ldots, x_k)]$ est appelée **image** de R (ou encore de F), et on la note **Im F**.

ii. Fonctions. Applications. Familles

Le cas particulier le plus important est bien sûr celui où F est une *fonction à un argument* (on dira simplement *fonction*). Du reste, on verra plus loin que toute fonction à k arguments peut se ramener à une fonction à un argument. Dom F est la collection des ensembles ayant une images et Im F est la collection des ensembles ayant un antécédent. Plus précisément, Im F est la collection des images des éléments de Dom F.

Si F est une fonction et si x et y sont des ensembles tels que $y = F(x)$, alors on dit que y est l'*image* de x par F ou que x est un *antécédent* de y.
Soit une collection A . La collection $\exists x\, [x \in A$ **et** $y = F(x)]$, ou en abrégé $(\exists x \in A)[\, y = F(x)]$, est appelée **image globale de A par F**, ou par abus de langage, **image de A par F**. On la note **F< A >**. C'est la collection des ensembles ayant un antécédent dans A par F. On la note aussi $\{\, \mathbf{F(x)}\ ;\ \mathbf{x \in A}\, \}$, ou $\{\, \mathbf{F(x)}\, \}_{\mathbf{x \in A}}$, ou quelquefois $\{\, \mathbf{F_x}\, \}_{\mathbf{x \in A}}$.

Posons $D = \mathrm{Dom}\, F$. On dit aussi que F est une **famille** *indexée* par D, et on la note $(\, \mathbf{F(x)}\,)_{\mathbf{x \in D}}$ ou quelquefois $(\mathbf{F_x})_{\mathbf{x \in D}}$. On a alors $\mathbf{Im\, F} = F < D > = \mathbf{F < Dom\, F >} = \{\, \mathbf{F(x)}\, \}_{\mathbf{x \in D}}$.
Si A est une collection telle que $D \subset A$, alors l'écriture $(\, \mathbf{F(x)}\,)_{\mathbf{x \in A}}$ désignera la famille $(F(x))_{x \in D}$.
Il faut se garder de confondre l'image de A par F (si elle existe) , F(A) , avec l'image *globale* de A par F , F< A>, qui elle existe toujours.
Si F est une fonction et si A et B sont des collections, il est clair qu'alors,
$A \subset B \Rightarrow F< A > \subset F < B>$.

Soit une F fonction et A une collection telle que $\mathrm{Dom}\, F \subset A$. Soit une collection B telle que $\mathrm{Im}\, F \subset B$. On dit alors que F est une *fonction de A dans B.* Si de plus Dom F = A , on dit alors que F est une **application** *de* A *dans* B , ou que F est une *application définie sur* A *et à valeurs dans* B, ou encore que F est une famille *d'éléments de* B indexée par A. Il est clair que si F est fonction, alors F est une application de Dom F dans Im F.

iii. Applications particulières

- La relation binaire $x \in \emptyset$ **ou** $y \in \emptyset$ est une relation fonctionnelle triviale.
  On appelle cette relation **application vide** ou **famille vide** et on la note aussi $\emptyset$. Il est clair que pour toute fonction F , $F = \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{Dom}\, F = \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, F = \emptyset$.
  A et B étant des collections, on dira que $\emptyset$ est *l'application vide de* A *dans* B.

- La relation $x \in A$ **et** $y = x$ est fonctionnelle. On la note $y = \mathrm{Id}_A(x)$. C'est la fonction *identité* sur A. Pour tout élément x de A , on a: $\mathrm{Id}_A(x) = x$. Tout élément de A est donc sa propre image et son propre antécédent par Id_A.
  On a $\mathrm{Dom}\, (\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Im}\, (\mathrm{Id}_A) = A$.

- La relation $x \in A$ **et** $y = b$, où A est une collection et b un ensemble, est fonctionnelle. Notons-la $y = F(x)$. C'est *une* fonction *constante* sur A. Pour tout ensemble x de A , on a: $F(x) = b$. On a : $\mathrm{Dom}\, F = A$ et
  $\mathrm{Im}\, F = \{b\}$

iv. Composition de deux fonctions

Soient F et G deux fonctions. La relation : $\exists y$ [$y = F(x)$ **et** $z = G(y)$] est fonctionnelle par rapport à z. On la note
$z = (G \circ F)(x)$. La fonction $H = G \circ F$ est appelée la *composée* de F et G.

v. Restriction d'une fonction à une collection

Si F est une fonction et A une collection, alors la relation : $x \in A$ **et** $y = F(x)$ est aussi fonctionnelle qu'on notera : $y = F'(x)$. F' est noté $\mathbf{F|A}$ est appelée *restriction* de F à A.
En effet, soient des ensembles x , y et y'. On suppose que:
[$x \in A$ **et** $y = F(x)$] **et** [$x \in A$ **et** $y' = F(x)$] . Il en découle immédiatement que $y = y'$.

B étant une collection, $(F|A)|B$ est simplement noté $F|A|B$. Il est clair que $F|A|B = F|B|A$. Il est évident aussi que si $A \subset B$, alors $F|A|B = F|A$. En particulier on a : $F|A|A = F|A$ et $F|\mathrm{Dom}\,F = F$.

Dom $(F|A)$ est la relation : $\exists y$ [$x \in A$ **et** $y = F(x)$] . Or cette relation est équivalente à : $x \in A$ **et** $\exists y$ [$y = F(x)$] c'est-à-dire $A \cap \mathrm{Dom}\,F$. On a donc : $\mathbf{Dom\,(F|A) = A \cap Dom\,F}$.
Im $(F|A)$ est la collection $\exists x$ [$x \in A$ **et** $y = F(x)$] . On a donc $\mathbf{Im\,(F|A) = F < A > = \{ F(x) \}_{x \in A}}$
En particulier Dom $(F|\varnothing) = \varnothing$, donc $F|\varnothing = (F(x))_{x\in\varnothing} = \varnothing$, et Im $(F|\varnothing) = F < \varnothing > = \{ F(x) \}_{x\in\varnothing} = \varnothing$.

On en déduit que :
- $F< A > = F< A \cap \mathrm{Dom}\,F >$
- Si $\mathrm{Dom}\,F \subset A$, alors $\mathrm{Dom}\,(F|A) = \mathrm{Dom}\,F$ et $F< A > = \mathrm{Im}\,F$.
- Si $A \subset \mathrm{Dom}\,F$, alors $\mathrm{Dom}\,(F|A) = A$, donc $F < A > \subset \mathrm{Im}\,F$. Dans ce cas, on a pour $x\in A$, $(F|A)(x) = F(x)$. Plus généralement, on a le résultat suivant :
- Soient F et G deux fonctions et A une collection telle que $A \subset \mathrm{Dom}\,F \cap \mathrm{Dom}\,G$. Alors dire que pour tout $x\in A$,
  on a $F(x) = G(x)$, revient à dire que $F|A = G|A$.

vi. Applications injectives, surjectives, bijectives

Soient deux collections A et B et F une application (au sens large indiqué ci-dessus) de A dans B. On dit que F est une **injection** de A dans B (ou est *injective*) si pour tous éléments a et a' de A , on a : $F(a) = F(a') \Rightarrow a = a'$.
On dit que A est **injectable** dans B, et on écrit A **inj** B , s'il existe une injection de A dans B. En particulier, toute partie A d'une collection B est injectable dans B. En effet, la restriction de Id_B à A est injection de A dans B, qu'on appelle injection *canonique* de A dans B.

On dit que F est une **surjection** de A sur B (ou est *surjective*) si $F< A > = B$. On écrira A **surj** B pour signifier qu'il existe une surjection de A sur B.

On dit que F est une **bijection** de A sur B (ou est *bijective*) si elle est injective et surjective. Les collections A et B sont alors dites **équipotentes**, et on écrit A **éqp** B.

On établit alors aisément les propriétés classiques suivantes :
- A inj B **et** B inj C $\Rightarrow$ A inj C
- A surj B **et** B surj C $\Rightarrow$ A surj C d'où
- A éqp B **et** B éqp C $\Rightarrow$ A éqp C

Si F est une bijection de A sur B, alors la réciproque de la relation $y = F(x)$ est aussi une relation fonctionnelle bijective notée $y = F^{-1}(x)$. On dit alors que F et F^{-1} sont des bijections réciproques. On a $y = F(x) \Leftrightarrow x = F^{-1}(y)$. De même, on vérifie très aisément que si X est une partie de A et Y une partie de B, on a :
$Y = F< X > \Leftrightarrow X = F^{-1} < Y >$. En particulier, comme $\mathrm{Im}\,F = F< \mathrm{Dom}\,F >$, on a donc
$\mathrm{Dom}\,F = F^{-1} < \mathrm{Im}\,F >$.

Sur toute collection A , Id_A est une bijection. Si F est une bijection de A sur B , on a :
$F^{-1} \circ F = Id_A$ et $F \circ F^{-1} = Id_B$.

b. Schéma de remplacement

Pour toute fonction F et pour tout ensemble a , ***F< a >*** *est un ensemble.*

Ce schéma traduit le fait que pour toute fonction F et pour tout ensemble a, il existe un ensemble dont les éléments sont les images des éléments de a par F.

Formule: $\forall x_1 ... \forall x_k$ [$\forall x\ \forall y\ \forall y'$ [$R(x , y, x_1 , ... , x_k)$ **et** $R(x , y ', x_1 , ... , x_k)$ $\Rightarrow$ $y = y'$]
$\Rightarrow$ $\forall t\ \exists w \forall v$ [$v\in w \Leftrightarrow (\exists u \in t)\ R(u, v, x_1 , ... , x_k)$]]

Cette formule est appelé *schéma* car elle consiste en fait en une liste infinie de formules, une pour chaque formule $R(x , y, x_1 , ... , x_k)$ ayant au moins deux variables libres.

i. Théorème de la paire

Étant donnés deux ensembles a et b, il existe un ensemble dont les éléments sont a et b.
Autrement dit, pour tous ensembles a et b, la paire {a , b} est un ensemble.

Nous avons déjà les ensembles $0 = \varnothing$ et $1= \{\varnothing\}$ et la paire $\{0, 1\} = \mathcal{P}(1)$.
Soit la relation : ($x = 0$ **et** $y = a$) **ou** ($x = 1$ **et** $y = b$). Il est clair qu'elle est fonctionnelle. Notons la $y = F(x)$. On a $F(0) = a$ et $F(1) = b$. Dom F est l'ensemble $\{0, 1\}$. Évidemment F< {0, 1} > est la collection {a , b} qui donc est un ensemble d'après le schéma de remplacement.

En particulier, pour un ensemble a , le singleton {a} est un ensemble.

ii. Schéma de compréhension

Étant donnés un ensemble a *et un énoncé* P(x) *à une variable libre, l'énoncé* $x \in a$ **et** P(x) *définit un ensemble.*

En effet, soit b la collection définie par $x \in a$ **et** P(x). La relation binaire: $y = x$ **et** P(x) est fonctionnelle. Notons la $y = F(x)$. Le schéma de remplacement implique que F< a > est un ensemble. Or F< a > est défini par :
$\exists x$ [$x\in a$ **et** $y = F(x)$] , c'est-à-dire $\exists x$ [$x\in a$ **et** $y = x$ **et** P(x)] , ou encore $\exists x$ [$y = x$ **et** $x \in b$] , c'est-à-dire $y \in b$, d'où b = F< a > est un ensemble.

Ce schéma traduit le fait que pour ensemble a et pour toute propriété P, il existe un ensemble b dont les éléments sont ceux de a vérifiant P. L'ensemble b sera parfois noté **{ $x \in A$; P(x) }** . C'est la notation dite en *compréhension*.

Lemme
a étant un ensemble, toute partie de a est un ensemble.

En effet, soit une collection $b \subset a$. L'énoncé $x\in b$ équivaut à : $x\in a$ **et** $x\in b$. D'après le schéma de compréhension, b est donc un ensemble.

iii. Différence de deux collections (Troncature d'une collection)

Soient deux collections A et B. La collection $x \in A$ **et** $x\notin B$ est la **différence de A et B** (ou **collection A tronquée de B**). On la note **A – B**. Si en particulier B est une partie de A , alors A – B est appelé le *complémentaire de B dans A.*

Si A est un ensemble, il est clair que d'après le schéma de compréhension, A – B est un ensemble.

Lemme 1
Si A est une collection et X une partie de A , on a : A – (A – X) = X.

Soit $x \in A$. On a : $x \in A - (A - X) \Leftrightarrow x \in A$ **et** **non** $[x \in (A - X)]$
$\Leftrightarrow x \in A$ **et** **non** $[x \in A$ **et** **non** $(x \in X)] \Leftrightarrow x \in A$ **et** $(x \notin A$ **ou** $x \in X)$
$\Leftrightarrow (x \in A$ **et** $x \notin A)$ **ou** $(x \in A$ **et** $x \in X) \Leftrightarrow (x \in A$ **et** $x \in X) \Leftrightarrow x \in X$. C.Q.F.D.

Lemme 2
Soient une collection A et X et Y deux parties de A. On a : $X \subset Y \Leftrightarrow A - Y \subset A - X$.

Si $X \subset Y$ alors $(x \in X \Rightarrow x \in Y)$ donc $(x \notin Y \Rightarrow x \notin X)$. Donc si $x \in (A - Y)$ alors $x \in A$ **et** $x \notin Y$ donc $x \in A$ **et** $x \notin X$ donc $x \in (A - X)$ d'où $A-Y \subset A-X$.
Réciproquement, si $A-Y \subset A-X$ alors $[x \in (A-Y) \Rightarrow x \in (A-X)]$ donc $[x \in A$ **et** $x \notin Y \Rightarrow x \in A$ **et** $x \notin X]$ donc $[$ **non** $(x \in A$ **et** $x \notin X) \Rightarrow$ **non** $(x \in A$ **et** $x \notin Y)]$ donc $(x \notin A$ **ou** $x \in X \Rightarrow x \notin A$ **ou** $x \in Y)$. Et comme $x \in X \Rightarrow x \in A$, on a donc $x \in X \Rightarrow x \in Y$, d'où $X \subset Y$. C.Q.F.D.

5. Réunion et intersection d'une collection. Axiome de la réunion

a. Réunion d'une collection

i. Définitions

Soit une *collection* A et soit la collection R définie par : $x \in R \Leftrightarrow (\exists y \in A)(x \in y)$. On la note: $\bigcup_{y \in A} y$, ou encore **réu (A)** et on l'appelle la **réunion** de la collection A.

En fait, réu (A) est la collection des subéléments d'ordre deux de A, c'est-à-dire la collection des éléments des éléments de A.
En particulier, si A est une paire {b, c} , alors réu (A) est noté $b \cup c$, lire "b union c". Dans ce cas, on a $x \in R \Leftrightarrow x \in b$ **ou** $x \in c$.

On remarquera que R est une collection dans le cas plus général où b et c sont des collections. Dans ce cas la collection R sera aussi noté $b \cup c$.

ii. Axiome de la réunion

Pour tout ensemble a, ***réu (a)*** *est un ensemble.*

Cela signifie que pour tout ensemble a, il existe un ensemble dont les éléments sont les éléments des éléments de a.
Formule: $\forall x \, \exists y \, \forall z \, [z \in y \Leftrightarrow (\exists t \in x)(z \in t)]$.

b. Intersection d'une collection

Soit une *collection* A et soit la collection I définie par : $x \in I \Leftrightarrow (\forall y \in A)(x \in y)$. On la note: $\bigcap_{y \in A} y$, ou encore **inter (A)** et on l'appelle l'**intersection** de A.

En particulier, si A est une paire {b, c} , alors inter (A) est noté $b \cap c$, lire "b inter c". Dans ce cas, on a $x \in I \Leftrightarrow x \in b$ **et** $x \in c$.

On remarquera que I est une collection dans le cas plus général où b et c sont des collections. Dans ce cas la collection I sera aussi noté $b \cap c$.

Si deux collections A et B sont telles que $A \cap B = \varnothing$, alors on dit que A et B sont **disjointes**. A et B n'ont aucun élément commun. En particulier, pour toute collection A, on a : $A \cap \varnothing = \varnothing$.

c. Réunion et intersection d'une famille

i. Définition

Soit F une fonction et I un ensemble.

réu (F< I >) est noté aussi $\bigcup_{i\in I} \mathbf{F_i}$ et **inter (F< I >)** est noté aussi $\bigcap_{i\in I} \mathbf{F_i}$

Dans le cas où I est le domaine de F , **réu (F< I >)** = **réu ({ $\mathbf{F_i}$ }$_{\mathbf{i\in I}}$)** = $\bigcup_{i\in I} \mathbf{F_i}$ est appelé la *réunion de la famille* $(F_i)_{i\in I}$ et : **inter (F< I >)** = **inter ({ $\mathbf{F_i}$ }$_{\mathbf{i\in I}}$)** = $\bigcap_{i\in I} \mathbf{F_i}$ est appelé la *intersection de la famille* $(F_i)_{i\in I}$.

Le schéma de remplacement et l'axiome de réunion assurent que si I est un ensemble, alors $\bigcup_{i\in I} F_i$ est un ensemble.

Il est trivial que la réunion d'une famille vide est vide.

Il est également trivial que l'intersection d'une famille vide est la collection $\mathfrak{U}$ toute entière.

Si I est un ensemble **non vide**, on peut considérer un élément i_0 de I. Il est alors évident que : $\bigcap_{i\in I} F_i = F_{i_0} \cap \bigcap_{i\in I} F_i$, ce qui, d'après le schéma de compréhension implique que $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un ensemble.

En particulier, si X est une collection non vide, inter (X) = $\bigcap_{x\in X} x$ est un ensemble.

Lemme

a et b étant deux ensembles, $a \cup b$ est un ensemble.

Il suffit d'appliquer l'axiome de réunion à la paire {a , b}.

Étant donné un nombre fini (au sens intuitif) d'ensembles $a_1 , ... , a_n$, on peut construire par récurrence l'ensemble noté

$a_1 \cup ... \cup a_n$. Par exemple l'ensemble $a_1 \cup a_2 \cup a_3$ est $(a_1 \cup a_2) \cup a_3$. L'ensemble $a_1 \cup ... \cup a_n \cup a_{n+1}$ est $(a_1 \cup ... \cup a_n) \cup a_{n+1}$.

ii. Ensembles finis. Ordinaux finis

Étant donné un nombre fini (au sens intuitif) d'ensembles $a_1 , ... , a_n$, on peut construire par récurrence l'ensemble noté $\{ a_1 , ... , a_n \}$ dont les éléments sont $a_1 , ... , a_n$. On a $\{ a_1 , ... , a_n \} = \{ a_1 \} \cup ... \cup \{a_n \}$.

Nous pouvons maintenant construire une collection d'ensembles qui seront désormais ce que nous appellerons *entiers naturels*. Associons, par récurrence, à chaque entier intuitif un ensemble, appelé **ordinal fini,** de la façon suivante :

$0 = \varnothing$
$1 = \{0\} = \{\varnothing\}$
$2 = \{0,1\}= \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
$3 = \{0,1,2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$
....
$n + 1 = \{0, 1, 2,..., n\} = n \cup \{n \}$
....

Il est aisé de vérifier que les ensembles ainsi construits sont distincts. Les relations intuitives d'infériorité < et de supériorité > dans les entiers se confondent dans les ordinaux finis avec les relations $\in$ et $\ni$.

Remarque :

Dans certaines théories les notions d'*ordinal fini* et d'*entier intuitif* ne coïncident pas. Il n'en est pas ainsi dans la théorie ici exposée.

On dira d'un ensemble X qu'il est **fini** s'il est équipotent à un ordinal fini. Il est **infini** dans le cas contraire.
Soit l'ensemble A = { a_1 , ... , a_n }. Si les éléments de A sont distincts, alors l'entier n est le *nombre d'éléments* ou le **cardinal** de A . On le note $|\mathbf{A}|$ ou **Card (A)** ou **Card A** .

Alors les propriétés suivantes sont évidentes :
- Toute partie B de A est finie, et on a $|B| \leq n$.
- L'ensemble des parties de a, $\mathcal{P}(a)$, est fini et on a $|\mathcal{P}(a)| = 2^n$.
- Si les ensemble a_1 , ... , a_n sont finis, alors réu (A) = $a_1 \cup ... \cup a_n$ est un ensemble fini et on a $|$réu (A)$|$ = $k_1 + ... + k_n$, où k_1 , ... , k_n sont les cardinaux respectifs des a_1 , ... , a_n supposés disjoints. Si a et b sont deux ensembles, on a de façon générale $|a \cup b| = |a| + |b| - |a \cap b|$.

La collection des ordinaux finis est notée ω. Toute collection équipotente à ω est dite infini **dénombrable**.

Définition
Soit une collection A. On appelle **suite** *d'éléments de* A toute application de ω dans A.
Si n est un entier, on appelle **suite finie** d'éléments de A toute application s de n dans A. L'entier n est appelé la **longueur** de la suite et on la note **l(s)**. Donc l(s) = Dom s . $\varnothing$ est la *suite vide*, donc de longueur 0.

d. Recouvrements et partitions

Soit un ensemble A et F = $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de A. On dit que la famille F est un **recouvrement** de A si $A = \bigcup_{i\in I} A_i$.
Il est clair que toute famille est un recouvrement de sa réunion. On dit que le recouvrement F est une **partition** de A si pour tous indices distincts i et j , A_i et A_j sont disjoints. La partition F est dite *stricte* si tout A_i est non vide.

Un exemple de partition : Soient deux collections non vides A et B , f une application non vide de A dans B et I = Im f. Pour tout $i\in I$, soit A_i la collection définie par : $x \in A$ **et** $f(x) = i$. Si A est un ensemble, alors les schémas de remplacement et de compréhension impliquent que I et les A_i sont des ensembles. Il est évident que les A_i opèrent une partition stricte de A. Si I n'est pas un ensemble, dans ce cas A ne l'est pas non plus. Pour $i\in I$, A_i n'est pas forcément un ensemble. F = $(A_i)_{i\in I}$ n'est donc pas une famille à proprement parler. Et pourtant la relation $(\exists i\in I)(x\in A_i)$ a un sens et n'est autre que la collection A, ce qu'on écrit : $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. On dira donc que la famille, au sens extrapolé, de collections $(A_i)_{i\in I}$ est une partition stricte de A.

6. Relations dans la collection des ensembles

a. Propriétés d'une relation binaire

Soit une relation binaire R(x, y), qu'on notera aussi x R y. Soient a, b, c trois ensembles. On dit que R est :
- *réflexive* si: a R b $\Rightarrow$ a R a **et** b R b.
- *symétrique* si: a R b $\Rightarrow$ b R a.
- *antisymétrique* si: a R b **et** b R a $\Rightarrow$ a = b.
- *transitive* si : a R b **et** b R c $\Rightarrow$ a R c.

<u>Remarque</u> :
La transitivité définie ici (pour une relation binaire) ne doit pas être confondue avec celle définie pour une collection X.

b. Relation d'équivalence

On dit que R est une **relation d'équivalence** si R est réflexive, symétrique et transitive.
On appelle le *domaine* de R la collection définie par x R x .

Par exemple la relation = est une relation d'équivalence de domaine $\mathcal{U}$.

R sera souvent noté ≈ . On note alors que la réciproque de R est R (c'est la conséquence de sa symétrie). Si a est un élément du domaine de R, la collection définie par x R a est appelé la *classe d'équivalence* de a.

c. Relation d'ordre

i. Relation d'ordre au sens large

On dit que R est une **relation d'ordre** *(au sens large)* si R est réflexive, antisymétrique et transitive.
On appelle le *domaine* de R la collection définie par x R x .

Par exemple la relation $\subset$ est une relation d'ordre de domaine $\mathcal{U}$.

R sera souvent noté $\leq$ et sa réciproque $\geq$. Les relations $x \leq y$ **et** $x \neq y$ et $x \geq y$ **et** $x \neq y$ sont alors respectivement notées < et > . On dit que R est *totale* si pour tous éléments a et b du domaine de R, a et b sont *comparables* pour R, c'est-à-dire on a : a R b ou b R a .

ii. Relation d'ordre au sens strict

Soit une collection D et une relation binaire x R y. On dit que R est une relation d'*ordre strict* sur D si R est transitive dans D et si pour tous objets a et b de D, on a: a R b $\Rightarrow$ **non** (b R a)
On dit que D est le *domaine* de R si pour tous objets a et b de D, on a : a R b $\Rightarrow$ a $\in$ D **et** b $\in$ D.

Une relation d'ordre strict est souvent notée < , et sa réciproque >.

<u>Remarque :</u>
Si $\leq$ est une relation d'ordre large de domaine D, la relation < qui lui correspond est une relation d'ordre strict de domaine D.
De même si < est une relation d'ordre strict de domaine D, la relation : x $\in$ D **et** y $\in$ D **et** (x < y **ou** x = y) est une relation d'ordre large de domaine D.

7. Produit de deux ensembles. Ensemble des applications d'un ensemble a dans un ensemble b. Produit d'une famille

a. Couples, n – uplets et suites

Si a et b sont deux ensembles, l'ensemble {{a} ,{a , b}} est noté (a , b) et appelé *couple*.
Le seul intérêt de cette définition est le :

- THÉORÈME 1

(a , b) et (a' , b') étant deux couples, si (a , b) = (a' , b') , alors a = a' et b = b'.

- Si a = b alors (a , b) ={{a}} donc est un singleton. (a' , b') est donc aussi un singleton, donc a' = b' , donc {{a}}= {{a'}} d'où a = a' = b = b'.
- Si a $\neq$ b , (a , b) est une paire stricte, il en de même pour (a' , b'). Comme {{a} ,{a , b}} = {{a'} ,{a' , b'}} . On a: soit {a} = {a' , b'} et {a , b} = {a'} (ce qui est impossible car un singleton ne peut être égal à une paire stricte) , soit {a} = {a'} et {a , b} = {a' , b'} (la seule possibilité). on en déduit que a = a' , donc aussi b = b'

Si a , b , c sont trois ensembles, on appelle *triplet* (a , b , c) le couple (a , (b , c)) .
De même un *quadruplet* (a , b , c , d) est le couple (a , (b , c , d))
De façon générale, pour tout entier n > 0, le **n – uplet** $\mathbf{x = (a_1 , a_2 , ... , a_n)}$, encore noté $\mathbf{(a_i)_{i\in n}}$, est le couple $(a_1 , (a_2 , ... , a_n))$. n est appelé la *longueur* du n-uplet.

Il résulte de la propriété d'un couple que si $(a_1 , a_2 , ... , a_n) = (a'_1 , a'_2 , ... , a'_n)$ alors $a_1 = a'_1$, $a_2 = a'_2$, ..., $a_n = a'_n$.
$\mathbf{a_i}$ est appelé la **i-ème projection** du n-uplet $x = (a_1 , a_2 , ... , a_n)$ et on la note $\mathbf{pr_i(x)}$.

La suite (la famille ou l'application) vide ∅ est appelée **0-uplet**.
Pour deux ensembles a et b, il existe une seule application de {a} dans {b}. En particulier, l'application de {0} dans {a} est appelée **1-uplet** et noté (a).
Étant donnée une suite s de longueur n, en notant s(i) par s_i , on associe à s le n-uplet $(s_0 , \ldots , s_{n-1})$ désigné ici par $f_n(s)$. Réciproquement, à tout n-uplet $a = (a_1 , \ldots , a_n)$ correspond la suite s définie par $s(i-1) = a_i$ pour $1 \leq i \leq n$. On a donc
$f_n(s) = a$. Sous réserve que les suites sont des ensembles, il est clair que f_n est une bijection de la collection des suites de longueur n sur la collection des n-uplets. Pour cette raison on assimilera en pratique *suite finie* de longueur n et *n-uplet*.

Soit une collection X et un entier n. La collection des n-uplets $(x_1 , \ldots , x_n)$ tels que $x_1 \in X , \ldots , x_n \in X$ est noté X^n . En particulier la collection des n-uplets est $\mathcal{U}^n$.

- THÉORÈME 2

Étant donné un entier n , à toute relation à n arguments $R(x_1 , \ldots , x_n)$ correspond une unique collection r de n-uplets. Réciproquement, à toute collection r de n-uplets correspond une unique relation à n arguments $R(x_1 , \ldots , x_n)$.

En effet à toute relation à n arguments $R(x_1 , \ldots , x_n)$, il suffit d'associer la collection r définie par $R(x_1 , \ldots , x_n)$.
Réciproquement, à toute collection r de n-uplets, on associe la relation à n arguments $R(x_1 , \ldots , x_n)$:
$(x_1 , \ldots , x_n) \in r$.

Ce théorème nous permet de considérer désormais une relation à n arguments comme une collection de n-uplets.

<u>*Remarque :*</u>
La notion de famille $\mathbf{(x_i)_{i\in I}}$ indexée par un ensemble I généralise en fait la notion de n-uplet $\mathbf{(x_i)_{i\in n}}$ assimilé. Il est alors naturel d'appeler aussi **I-uplet** une famille indexée par I.

Désormais lorsqu'on parlera de *famille* $x = (x_i)_{i\in I}$, la collection des indices I, sauf précision contraire, *sera un ensemble*. L'ensemble x_i est appelé la **projection d'indice i** de la famille ou du n-uplet, et on le note $\mathbf{pr_i (x)}$. Soit A un ensemble de I- uplets. L'ensemble des projection d'indice i∈I des éléments de A est noté $\mathbf{pr_i < A >}$.

b. Produit de deux ensembles

- THÉORÈME 2

Soient deux ensembles a et b. La collection des couples (x , y) tels que $x \in a$ et $y \in b$ est un ensemble appelé *produit* de a et b. On le note $\mathbf{a \times b}$.

En effet, considérons la collection $c(z) \;:\; (\exists x \in a)(\exists y \in b)[\, z = (x , y)\,]$. Il suffit de montrer que c est une partie d'un ensemble. Soit un élément z de c. On a $z = (x , y) = \{\{x\} ,\{x , y\}\}$ où $x\in a$ et $y \in b$. x et y sont donc des éléments de $a \cup b$. {x} et {x , y} sont donc des éléments de $\mathcal{P}(a \cup b)$. Donc $z = \{\{x\} ,\{x , y\}\}$ est une partie de l'ensemble
$\mathcal{P}(a \cup b)$. C.Q.F.D.

Si A et B sont des collections, la collection des couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$ est aussi notée $A \times B$ et on l'appelle produit des collections A et B.

c. Graphes

On appelle *graphe* toute collection de couples, c'est-à-dire toute partie de $\mathcal{U}^2$. Une relation binaire sera donc assimilée à son graphe.

On dit d'un graphe G qu'il est *fonctionnel* si la relation binaire qui lui correspond l'est.
Une fonction, une application, ou une famille, sera donc désormais un graphe fonctionnel. Dans ce cas $pr_1< G >$ et
$pr_2< G >$ ne sont rien d'autre que le domaine et l'image de la fonction. On les notera donc Dom G et Im G.
Pour que G soit un ensemble, il suffit (d'après le schéma de remplacement) que $pr_1< G >$ le soit.

d. Ensemble des applications d'un ensemble a dans un ensemble b et produit d'une famille

- THÉORÈME 1

Soient deux ensembles a et b. La collection des applications de a dans b est un ensemble.

Car une application de a dans b est un graphe dont le domaine est une partie de a et dont l'image une partie de b. C'est donc une partie de $a \times b$. Donc la collection $f \in C$ définie par : *f est application de a dans b* , encore notée $f : a \to b$ est équivalente à:

$f : a \to b$ **et** $f \in \mathcal{P}(a \times b)$. Donc C = C $\cap$ $\mathcal{P}(a \times b)$. Or C $\cap$ $\mathcal{P}(a \times b)$ est un ensemble d'après le schéma de compréhension.

C est noté $\mathbf{b^a}$.

<u>*Attention:*</u> Cette notation ne doit pas être confondue avec la notation en exposant E^Y adoptée pour les énoncés restreints.

En particulier, si a est un entier n , b^n est l'ensemble des suites finis d'éléments de b de longueur n. La réunion $\bigcup_{n\in\omega} b^n$ est alors la collection des suites finies d'éléments de b. On la note **σ(b)**.

On peut étendre cette définition au cas où B est une collection et a un ensemble. Il est clair que schéma de remplacement assure qu'une application de a dans B est un ensemble, donc on peut parler de la collection des applications de a dans B, qu'on notera aussi $\mathbf{B^a}$.

- THÉORÈME 2

Soit un ensemble I et $(F_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I. Appelons B la réunion $\bigcup_{i\in I} F_i$ de cette famille. On considère la collection $z \in C$ définie par :

$z : I \to B$ **et** $(\forall i\in I)\,[z(i) \in F_i]$. C est un ensemble appelé *produit de la famille* $(F_i)_{i\in I}$, et noté $\prod_{i\in I} \mathbf{F_i}$.

En effet il est clair que pour tout élément z de C, z est un élément de B^I. Donc C = C $\cap$ B^I.

Définition.

Soit une collection *transitive* U munie d'une relation binaire, notée $\in$. On dit que U est un *modèle central* ou encore est une *théorie centrale des ensembles*, si U satisfait :

- l'axiome d'extensionnalité
- l'axiome de l'ensemble vide
- l'axiome de l'ensemble des parties
- le schéma de remplacement
- l'axiome de la réunion

Les théories des ensembles vont se différencier par les axiomes qui vont se greffer sur ce "noyau" central. La théorie des univers est obtenue par l'adjonction à la théorie centrale de deux autres axiomes qui seront introduits ultérieurement.

II . Ordinaux et cardinaux

Nous abordons ici les ordinaux et les cardinaux qui sont les prolongements naturels des entiers. Ils sont parmi les outils les plus vitaux pour le développement d'une théorie des ensembles. Leur sont étroitement liées les relations de bon ordre.

1. Collections bien ordonnées

a. Définition

Soit une relation d'ordre R de domaine est une collection D. On dit que R est une relation de *bon ordre* sur D si toute partie X non vide de D a un plus petit élément . Cet élément est aussi appelé le **minimum** de X.
Si R est une relation d'ordre large (resp. strict) on l'appellera relation de bon ordre large (resp. strict).

Une collection bien ordonnée est un couple de collections (D, R) tel que $R \subset D^2$ et tel que R soit une relation de bon ordre de domaine D. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur R, on parlera simplement de la collection bien ordonnée D. On peut remarquer que si D ou R n'est pas un ensemble, le "couple" (D, R) est simplement la donnée deux collections D et R prises dans cet ordre. On parlera d'ensemble bien ordonné si D est un ensemble, dans ce cas R l'est aussi.

Par exemple : Si $D = \{0, 1, 2, 3\}$ et $R = \{(0,1) , (0, 3) , (2 , 0) , (2, 1) , (2, 3) , (3, 1)\}$, l'ensemble D est bien ordonnée par R qui est une relation de bon ordre strict sur D. $R' = R \cup \{(0,0) , (1, 1) , (2 , 2) , (3, 3)\}$ est une relation de bon ordre large sur D. On vérifie que 2 est le minimum de D pour ces ordres, car l'ordre conféré à D est $\{2, 0, 3, 1\}$. Du reste, sur un ensemble fini, toute relation d'ordre total est un bon ordre.

Il est clair que si D est un ensemble, la collection X des relations binaires sur D est aussi un ensemble, puisque si $R \in X$, alors $R \subset D^2$ donc $R \in \mathcal{P}(D^2)$, donc $X \subset \mathcal{P}(D^2)$. En particulier, la collection des bons ordres sur D est un ensemble.

<u>*Remarque*</u> :
Si (D, R) est bien ordonné, alors R est totale sur D. En effet deux éléments a et b de D sont toujours comparables par R puisque la partie $\{a , b\}$ de D admet un minimum pour R.
Si D' est une partie de D , on vérifie que la relation R' définie par $x \in D'$ **et** $y \in D'$ **et** $x R y$ est aussi une relation de bon ordre de domaine D'. On dit que R' est l'ordre *induit* par R sur D'. Il est clair que $R' \subset R$. On dit aussi que D' est bien ordonnée par R. Il est évident aussi que si R est un bon ordre large (resp. strict) sur D, alors R' est un bon ordre large (resp. strict) sur D'.

b. Segment initial d'une collection bien ordonnée

Soit (A, R) une collection bien ordonnée. On notera généralement les relations $x R y$ **ou** $x = y$ et $x R y$ **et** $x \neq y$ par $\leq$ et $<$, leurs réciproques étant bien sûr $\geq$ et $>$. Lorsqu'on parlera désormais de collection bien ordonnée (A, R), l'ordre R sera sous-entendu strict puisqu'à chaque ordre large correspond un ordre strict et vice versa.

Soit $u \in A$. Le plus petit élément u' de A supérieur à u (s'il existe) est appelé le *successeur* de u pour R. u' est alors le *prédécesseur* de u. Un élément de A *distinct du minimum* et qui n'a pas de prédécesseur pour R est dit *limite* pour R.

Soit $s \subset A$. On dit que s est un **segment initial** de A si pour tout $x \in s$, tout élément de A strictement inférieur à x appartient à s. Bien entendu A est un segment initial de A.

Soient u et v deux éléments de A. La collection $x \in A$ **et** $u \leq x$ **et** $x < v$ est notée $[u, v[_{A, R}$ ou $S_{u, v}(A, R)$.
Si a est le minimum de A , cette collection est équivalente à $x \in A$ **et** $x < v$, qu'on note par $[a, v[_{A, R}$ ou $S_v(A, R)$. S'il n'y a aucune ambiguïté sur A et R, on la notera $[a, v[$ ou S_v .
Il est clair que pour deux éléments u et v de A , si $u < v$, alors $[a, u[$ est une partie stricte $[a, v[$.

Toute partie s de A est un segment initial de A si et seulement si $s = A$ ou $s = [a, u[$, avec $u \in A$.
En effet si $s \neq A$, on peut considérer le minimum u de A n'appartenant pas à s. Pour tout $x \in A$,
Si $x < u$ alors $x \in s$.
Si $x \geq u$, alors $x \notin s$ sinon on aurait $u \in s$. On en déduit que $s = [a, u[$. En particulier, A pourra être noté $[a, \Psi[$.
Si $s \neq A$, on dit que s est un segment initial *strict* de A.
S'il existe un élément b de s n'appartenant à aucun segment initial *strict* de s, il est clair qu'un tel élément est unique. On dit alors que b est l'*élément maximal* de s, qui sera alors noté [a, b]. Si b a un successeur c alors s est un segment initial strict de A, et on a $s = [a, c[$.

On dit que (A, R) , ou que l'ordre R , est du *premier degré* sur A si tout segment initial *strict* de A est un ensemble. Les collections bien ordonnées que nous aurons à considérer seront implicitement supposées du premier degré, car on verra que tous les bons ordres ne le sont pas forcément.

c. Ensembles bien ordonnés

Dans cette partie (A, R) est un *ensemble* bien ordonné. (A, R) est alors du premier degré.

- THÉORÈME

La réunion de toute famille de segments initiaux de A est un segment initial de A. L'intersection de toute famille de segments initiaux de A est un segment initial de A.

En effet, soit $(s_i)_{i\in I}$ une famille de segments initiaux de A et soit s sa réunion. Soit $x \in s$. Alors x appartient à un s_i. Comme s_i est un segment initial de A, tout élément y de A tel que $y < x$ appartient à s_i , donc y appartient à la réunion s, ce qui fait de s un segment initial de A. Soit s' l'intersection de la famille et soit $z \in s'$. z appartient à tous les s_i . Tout élément u de A tel que $u < z$ appartient aux s_i , donc à s', qui est donc aussi un segment initial.

Corollaire 1:
s étant un segment initial de A la réunion de tous les segments initiaux de s est un segment initial de s. Il en est de même pour l'intersection de tous les segments initiaux de s.

Notons As l'ensemble des segments initiaux stricts de A. Munissons As de la relation $\subset$, qu'on notera également $\leq$. On a le :

Corollaire 2 :
Tout ensemble X des segments initiaux stricts de A possède un minimum pour $<$, qui est inter (X).

En effet, soit X' l'ensemble des éléments x de A tels que $[a, x[$ soit un élément de X. A étant ordonné, on peut considérer le minimum x_0 de X' pour la relation < (dans A). Il est clair que pour tout x de X' , on a $x_0 < x$ donc $[a, x_0[\; < \; [a, x[$.
$[a, x_0[$ est donc le minimum de X pour la relation < (dans As). Il est clair aussi que $[a, x_0[$ n'est autre que l'intersection des éléments de X.

La conséquence immédiate de ce lemme est que (As, <) est un ensemble bien ordonné. On a pour deux éléments u et v de A , $u < v \Leftrightarrow [a, u[\; < \; [a, v[$, ce qui entraîne en particulier que $u = v \Leftrightarrow [a, u[\; = \; [a, v[$.
En fait, nous avons ainsi établi un *isomorphisme* d'ensembles bien ordonnés entre A et As. Grâce à ce "jumelage", on peut en pratique assimiler un élément de A au segment initial strict qu'il définit. Cette notion d'isomorphisme sera examinée plus loin.

d. Démonstrations et définitions par induction sur les collections bien ordonnées

Le plus grand intérêt des collections bien ordonnées est qu'elles permettent un mode de démonstration et de définition qui généralise le raisonnement par récurrence sur les entiers, savoir la *démonstration* ou *la définition par induction*.

- THÉORÈME 1 : **Principe de démonstration par induction.**

Soit (A, <) une collection bien ordonnée et P une collection.
Si $(\forall x \in A)([a, x[\; \subset P \quad \Rightarrow \quad x \in P)$ alors $A \subset P$.

La collection P exprime une propriété. Ce théorème affirme que si on a prouvé que pour tout $x \in A$, la véracité de la propriété pour tout élément de A strictement inférieur à x entraîne sa véracité pour x , alors la propriété est vraie pour tout élément de A.

En effet, supposons démontré: $(\forall x \in A)\ ([a, x[\ \subset P \Rightarrow x \in P)$. Montrons alors que cela entraîne : $(\forall x \in A)(x \in P)$.

Supposons qu'il existe $x \in A$ tel que $x \notin P$. A étant bien ordonné, on peut donc considérer le minimum x_0 de A tel que $x_0 \notin P$. Cela veut dire que pour tout $y \in A$ tel que $y < x_0$, on a $y \in P$. Or la collection $y \in A$ **et** $y < x_0$ est précisément $[a, x_0[$. On a donc $[a, x_0[\subset P$, ce qui d'après l'hypothèse entraîne $x_0 \in P$, d'où la contradiction. On a donc $(\forall x \in A)(x \in P)$. C.Q.F.D.

En particulier, ce théorème est utile pour *définir* un certain type d'application f de A dans une collection B. Soit $x \in A$. On veut associer à x son image f(x). On commence alors par supposer que f (y) a été définie pour tout y de A tel que $y < x$. Si avec cette hypothèse *on sait* définir f(x), alors f est définie pour tout $x \in A$. Tout réside dans le fait de "savoir définir f(x) à partir des f(y) pour $y < x$ ". f est alors déterminée par la donnée d'un *procédé* permettant de définir f(x) à partir des f(y). Voyons ce que doit être précisément ce procédé.

- THÉORÈME 2 : **Principe de définition par induction.**

Soient (A, <) une collection bien ordonnée (du premier degré), W une collection, M la collection des applications définies sur les segments initiaux stricts de A et à valeurs dans W , et H une application de M dans W. Alors il existe une application F de A dans W telle que pour tout $x \in A$, $F(x) = H (F| S_x)$. Et F est la seule application ayant cette propriété.

Démontrons ce théorème par étapes.

Étape 1

Soit B un segment initial de A. S'il existe une application f de B dans W telle que pour tout $x \in B$, on ait : $f(x) = H(f| S_x)$, alors f est unique.

Supposons qu'il existe une application g ayant cette propriété. Montrons par induction qu'on a alors $g(x) = f(x)$, pour tout $x \in B$. On suppose donc que pour tout $y \in B$ tel que $y < x$, on a $g(y) = f(y)$. On a alors $g|S_x = f|S_x$, donc $H(g|S_x) = H(f|S_x)$ soit $g(x) = f(x)$. C.Q.F.D.

L'application f étant unique on la notera f_B ou f_b si $B = S_b$, pour $b \in A$. Nous dirons ici, pour simplifier les propos, que " f_B existe" pour signifier qu'il existe une application f de B dans W telle que pour tout $x \in B$, on ait : $f(x) = H(f| S_x)$.

Étape 2

Soit B un segment initial de A. Si f_B existe, alors pour tout $x \in B$, f_x existe et on a : $f_x = f_B| S_x$. Réciproquement, si pour tout $x \in B$, f_x existe, alors f_B existe.

- Supposons que f_B existe. Soient $x \in B$ et $y \in S_x$. On a $y \in B$, donc $f_B(y) = H(f_B| S_y)$. On a aussi $f_B(y) = (f_B| S_x)(y)$. Pour $z \in S_y$, on a $z \in S_x$, donc $f_B(z) = (f_B| S_x)(z)$ d'où $f_B| S_y = (f_B| S_x)| S_y$, donc $H(f_B| S_y) = H [(f_B| S_x)| S_y]$, d'où $(f_B| S_x)(y) = H [(f_B| S_x)| S_y]$, pour $y \in S_x$. Donc f_x existe et on a $f_x = f_B| S_x$.

- Réciproquement, supposons que pour tout $x \in B$, f_x existe. Soit alors F l'application de B dans W définie par $F(x) = H(f_x)$, pour $x \in B$. Soit $y \in S_x$. On a $F(y) = H(f_y)$. S_y est un segment initial strict de S_x, donc d'après ce qui précède, $f_y = f_x| S_y$, donc $H(f_y) = H(f_x| S_y) = f_x(y)$, donc $F(y) = f_x(y)$, pour $y \in S_x$; donc $F| S_x = f_x$, d'où $F(x) = H(F| S_x)$, pour tout $x \in B$; ce qui veut dire que $f_B = F$ existe. C.Q.F.D.

Étape 3

f_A existe.

En effet, d'après l'étape précédente, il suffit d'établir que pour tout $x \in A$, f_x existe, ce que l'on montre par induction. Soit $x \in A$. Supposons que pour tout $y \in S_x$, f_y existe. D'après le même lemme, alors f_x existe. Donc que pour tout $x \in A$, f_x existe. C.Q.F.D.

Le théorème est donc démontré. Il apparaît d'après l'égalité $F(x) = H(F|S_x)$, que l'application H est le *procédé* permettant de définir F(x) connaissant $F|S_x$, c'est-à-dire les valeurs de F pour les $y < x$.
Ce théorème admet le corollaire un peu plus faible suivant :

Corollaire
Soient (A, <) *une collection bien ordonnée (du premier degré),* W *une collection,* M' *la collection des* ***images*** *des applications définies sur les segments initiaux stricts de* A *et à valeurs dans* W *, et* H' *une application de* M' *dans* W. *Alors il existe une application* F *de* A *dans* W *telle que pour tout* $x \in A$, $F(x) = H'(F < S_x >)$. *Et* F *est la seule application ayant cette propriété.*

Il suffit d'appliquer le théorème avec H défini de M dans W tel que $H(\varphi) = H'(\mathrm{Im}\,\varphi)$. On a alors pour $x \in A$,
$F(x) = H(F|S_x) = H'[\mathrm{Im}(F|S_x)] = H'(F < S_x >)$. C.Q.F.D.

On verra plus loin quelques utilisations particulièrement importantes de ce théorème, notamment avec les ordinaux.

2. Les ordinaux

a. Les collections ordinales

On dit qu'une collection α est une **collection ordinale** si elle vérifie les deux conditions suivantes :
1. α est transitive.
2. La relation $\in$ est un bon ordre strict sur α.

Si α est un ensemble, on dit alors qu'il est un **ordinal**.

L'énoncé « α *est un ordinal* » peut être exprimée par une formule à une variable libre sans paramètres notée *On*(α) qui définit la collection *On* des ordinaux.

On vérifie que les entiers, appelés par anticipation *ordinaux finis,* sont bien des ordinaux. En particulier on vérifie que les ensembles $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ notés 0 , 1 , 2 sont des ordinaux.

La relation $\in$ sera avec les ordinaux noté <.

b. Propriétés élémentaires des collections ordinales

Lemme 1 :
Si α est une collection ordinale, alors $0 = \varnothing$ est le minimum de α.

En effet, soit a le minimum de α. Si $a \neq \varnothing$, alors a possède un élément b forcément distinct de a puisque l'ordre $\in$ est strict. α étant transitif, b est aussi un élément de α. b est donc plus petit que a dans α, ce qui contredit la propriété de a.

Lemme 2 :
Si a est une collection ordinale, alors $\alpha \notin \alpha$.

Cela découle immédiatement de ce que l'ordre $\in$ est strict sur α. Pour tout élément x de α, on a $x \notin x$. Si $\alpha \in \alpha$, on a alors $\alpha \notin \alpha$, donc contradiction.

Lemme 3 :
Soit une collection ordinale α. Une partie s de α est un segment initial de α, si et seulement si elle est transitive.

En effet, dire que s est un segment initial signifie que si un élément β de α appartient à s, alors tout élément de β appartient à s, autrement dit s est transitive. On en déduit immédiatement le

Lemme 4 :
Soit une collection ordinale α et soit s un segment initial de α. Alors : ou bien $s = \alpha$ ou bien $s \in \alpha$.

Lemme 5 :

Si α est une collection ordinale, tout élément β de α est un ordinal.

- Il est clair que β est un ensemble. β est transitif. En effet soit $b \in \beta$. Si $x \in b$, on a alors $x \in b$ et $b \in \beta$ (il est évident que b et x sont aussi des éléments de α). La relation $\in$ étant transitive dans α, il vient que $x \in \beta$, donc $b \subset \beta$.
- Il est clair aussi que α étant transitif, $\beta \subset \alpha$. La relation $\in$ induit donc un bon ordre strict sur β.

Lemme 6 :
Les éléments d'une collection ordinale α sont ses segments initiaux stricts. On a : $\alpha = [0, \alpha[$.

C'est la conséquence directe des lemmes 3 , 4 et 5.

- THÉORÈME 1

Toute collection non vide X d'ordinaux a un minimum α pour la relation $\in$. Cet élément est l'intersection de X .

α = inter (X). Il est acquis que α est un ensemble. Montrons que c'est un ordinal.
- α est transitif. En effet, soit β un élément de α. β appartient donc à tout ordinal μ de X. μ étant transitif, on a $\beta \subset \mu$.. Donc $\beta \subset \alpha$.
- Il est immédiat que $\in$ induit un bon ordre strict sur α, puisque α est une partie d'ordinal.

Montrons que $\alpha \in X$. Il est clair que α est une partie transitive de tout élément μ de X. Supposons que pour tout $\mu \in X$, on ait $\alpha \neq \mu$.. Alors le lemme 4 implique que $\alpha \in \mu$, donc $\alpha \in$ inter (X), ou $\alpha \in \alpha$, ce qui est impossible. Il existe donc $\mu \in X$ tel que $\alpha = \mu$, en d'autres termes $\alpha \in X$. Le lemme 4 assure donc que pour tout élément ν de X distinct de α , $\alpha \in \nu$. C.Q.F.D.

La conséquence immédiate de ce théorème est le :

Lemme 7 :
Soient α et β deux ordinaux. On a : soit $\alpha = \beta$, soit $\alpha \in \beta$, soit $\beta \in \alpha$.

Il suffit d'appliquer le théorème en prenant pour X l'ensemble $\{\alpha, \beta\}$. Il est clair que pour les ordinaux, la relation $\leq$ (c'est-à-dire la relation $x \in y$ **ou** $x = y$), n'est autre que la relation d'inclusion.

Une collection X d'ordinaux est bien ordonnée par la relation $\in$. La conséquence immédiate est le

Lemme 8:
Pour qu'une collection X d'ordinaux soit une collection ordinale, il faut et il suffit qu'elle soit transitive.

<u>Exemple important</u> :
La collection *On* des ordinaux est une collection ordinale. En effet, il est clair que *On* est transitive. Mais *On* n'est pas un ordinal, sinon on aurait *On* $\in$ *On* ,ce qui d'après le lemme 2 est impossible pour une collection ordinale. Mais puisque *On* possède tout de même les caractéristiques d'un ordinal, on l'appellera le *transordinal* de $\mathcal{U}$. L'ordre sur *On* est du premier degré, car les segments initiaux stricts de *On* sont les ordinaux. Une collection ordinale est donc soit *On*, soit un ordinal.

Soit une collection X. La collection des ordinaux appartenant à X est notée ***On*(X)**. *On*($\mathcal{U}$) est donc *On*.

- THÉORÈME 2

La réunion d'une collection X d'ordinaux est une collection ordinale.

La réunion ρ de X est une collection d'ordinaux. Il suffit donc de montrer que ρ est transitive. Soit $\alpha \in \rho$. α appartient à un ordinal μ de X. On a donc $\alpha \subset \mu$, donc $\alpha \subset \rho$. ρ est donc une collection ordinale. C.Q.F.D.
Il est clair que si X est un ensemble, alors ρ est un ordinal.
En particulier, la réunion d'une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ d'ordinaux est un ordinal.

Lemme 9 :
Étant donné un *ensemble* X d'ordinaux , il existe un ordinal supérieur à tous les éléments de X.

Il est clair que l'ordinal ρ = réu (X) possède la propriété cherchée, car étant donné un élément α de X, si $\rho < \alpha$ c'est-à-dire si $\rho \in \alpha$, alors $\rho \in \rho$, ce qui est impossible. Il est clair que ρ est le plus petit ordinal supérieur aux éléments de X, autrement dit la *borne supérieure* de X. En effet, pour tout ordinal $\beta < \rho$, β appartient forcément à un élément de X et donc ne peut être supérieur à tous les éléments de X.

Si α est un ordinal, $\alpha \cup \{\alpha\}$ est aussi un ordinal. En effet c'est un ensemble d'ordinaux. Tout élément de $\alpha \cup \{\alpha\}$ est soit un élément de α, soit égal à α. Dans les deux cas, cet élément est une partie de α donc de $\alpha \cup \{\alpha\}$. Le *successeur* de α est l'ordinal $\alpha \cup \{\alpha\}$, qu'on note $\alpha + 1$. C'est le plus petit ordinal supérieur à α. En effet, si β est un ordinal tel que
$\beta > \alpha$, cela signifie alors que $\alpha \in \beta$. On a aussi $\alpha \subset \beta$. Donc $\beta \supset \alpha \cup \{\alpha\}$, c'est-à-dire $\beta \geq \alpha+1$.

Tout ordinal *non nul* qui n'est pas un successeur est donc *limite*.

On peut à présent donner une autre définition des ordinaux finis. Un ordinal est **fini** s'il a un prédécesseur et s'il en est de même pour tous ses éléments. On rappelle que dans cette théorie, les ordinaux finis se confondent avec les ordinaux associés au entiers intuitifs.
Une collection ordinale non finie est dite **infinie**. Il est évident qu'une collection ordinale limite est infinie (mais on verra que l'inverse n'est pas forcément vrai). En particulier, le transordinal *On* est limite, car si *On* avait un prédécesseur α, α serait donc un ordinal et par voie de conséquence son successeur *On*.
La collection ω des ordinaux finis est ordinale puisque transitive. ω est limite car s'il avait un prédécesseur α, α serait un ordinal fini, donc aussi son successeur ω . Il est clair que ω est la *plus petite* collection ordinale limite (donc infinie). On verra ultérieurement, moyennant d'autres axiomes, que ω est un ensemble.

c. Définitions par induction sur les collections ordinales

- THÉORÈME

Soient θ est une collection ordinale, W une collection, M la collection des applications définies sur les ordinaux $\alpha < \theta$ et à valeurs dans W , et H une application de M dans W. Alors il existe une application F de θ dans W telle que pour tout $\alpha < \theta$, on ait : $f(\alpha) = H(f|\alpha)$. F est la seule application ayant cette propriété.

C'est l'application directe du théorème 1. d. 2.

Cas particulier important:
H traduit un *procédé* permettant de définir $f(\alpha)$ à partir des $f(\beta)$, pour $\beta < \alpha$. f est alors déterminée par ce procédé. Ce théorème a un intérêt particulier lorsque $W = \mathcal{U}$ et $\theta = On$, plus généralement lorsque W est une *collection universelle* U (il en sera question plus loin) et $\theta = On$ (U) le *transordinal* de U. Encore plus généralement, on suppose que θ est non vide et que la collection W possède les propriétés suivantes (ce qui est le cas de *On* et $\mathcal{U}$) :

- $\theta \subset W$
- W est transitive
- Pour toute famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de W indexée par $I\in W$, l'ensemble $\bigcup_{i\in I} x_i$ est un élément de W.

Soient alors une application T de W dans W et $u\in W$. On définit l'application H de M dans W par :
$H(\varnothing) = u$ et pour $f \in M-\{\varnothing\}$, $H(f) = \bigcup_{\beta\in Dom f} T[f(\beta)]$.

Il existe alors une unique application F de θ dans W telle que pour tout $\alpha\in\theta$, on ait :
$F(\alpha) = H(F|\alpha)$. On a alors $\mathbf{F(0) = H(\varnothing) = u}$ et pour $\alpha > 0$, $F(\alpha) = \bigcup_{\beta\in Dom(F|\alpha)} T[(F|\alpha) (\beta)]$

On a $Dom (F|\alpha) = \alpha$, donc pour $\alpha > 0$ et $\beta\in\alpha$ on a $(F|\alpha) (\beta) = F(\beta)$, d'où $\mathbf{F(\alpha) = \bigcup_{\beta\in\alpha} T [F (\beta)]}$.

F est donc déterminée par la seule donnée de u et T . Si $u = \varnothing$, alors F est seulement déterminée par T, car alors l'expression $F(\alpha) = \bigcup_{\beta\in\alpha} T [F (\beta)]$ s'applique aussi à $\alpha = 0$.

W étant transitive, pour tout $\alpha\in\theta$, les ensembles $F(\alpha)$ et $T[\ F(\alpha)\ ]$ sont des parties de W. On définit par extrapolation $F(\theta) = \bigcup_{\alpha\in\theta} T\ [\ F\ (\alpha)\ ]$. Il est clair que $F(\theta) \subset W$. Mais la collection $F(\theta)$ n'est pas forcément un ensemble, à moins que W le soit.

3. Isomorphismes de collections bien ordonnées

Établissons maintenant des liens entre les collections bien ordonnées et les collections ordinales.

a. Définition et propriétés

Dans cette partie (A, R) et (A', R') sont deux collections bien ordonnées (du premier degré). Les ordres R et R' sont indifféremment notées < , bien qu'il ne s'agisse pas des mêmes ordres. φ est une *surjection* de A sur A' . a et a' sont les plus petits éléments respectifs de A de A'.
On a donc $f < A > = A'$.

Définition
On dit que φ est un **isomorphisme** (*de collections bien ordonnées*) de (A, R) sur (A', R'), ou encore de A sur A' s'il n'y a pas d'ambiguïté sur R et R', si pour tous éléments x et y de A, on a : $x < y \Leftrightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$.

On suppose dans cette partie que φ est un isomorphisme de A sur A'. On dit alors simplement que A et A' sont *isomorphes*.

Lemme 1
φ est une bijection de A sur A' et $a' = \varphi(a)$.

Puisque φ est surjective, il suffit de montrer qu'elle est injective. Soient x et y des éléments de A tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Supposons alors $x \neq y$. Si $x < y$, alors on a $\varphi(x) < \varphi(y)$, d'où une contradiction. Idem si $x > y$. Donc $x = y$.
$a' = \varphi(a)$. En effet, supposons qu'il existe un élément b' de A' tel que $b' < a'$. Soit alors $b\in A$ tel que $b' = \varphi(b)$. On a donc
$b < a$, ce qui contredit le fait que a est le minimum de A. C.Q.F.D.

Il est clair que la bijection réciproque φ^{-1} est un isomorphisme de A' sur A. On vérifie également que si ψ est un isomorphisme de (A', R') sur (A'', R'') , alors $\psi \circ \varphi$ est un isomorphisme de (A, R) sur (A'', R'').

Lemme 2
Dire que φ est un isomorphisme de A sur A', revient à dire que pour tout $x \in A$, on a : $\varphi < [a, x[> = [a' , \varphi(x)[$.

Cette égalité signifie que l'image d'un segment strict de A est un segment initial strict de A'.

- Supposons que pour tout $x\in A$, $\varphi < [a, x[> = [a', \varphi(x)[$. Il est alors immédiat que pour $y\in A$, si $y < x$, alors $y \in [a, x[$, donc $\varphi(y) \in [a' , \varphi(x)[$ d'où $\varphi(y) < \varphi(x)$.
  A l'inverse, pour $y \in A$, si $\varphi(y) < \varphi(x)$, alors $\varphi(y) \in [a', \varphi(x)[$. Si $y = x$, on aurait $\varphi(y) = \varphi(x)$, ca qui est contradictoire. Et si $y > x$, on a donc $x\in [a, y[$ donc $\varphi(x) \in [a' , \varphi(y)[$, donc $\varphi(x) < \varphi(y)$, ce qui est aussi contradictoire, donc $y < x$. On a donc $y < x \Leftrightarrow \varphi(y) < \varphi(x)$, donc f est un isomorphisme.

- Réciproquement, si φ est un isomorphisme, φ est alors une bijection. On a pour tous éléments x et y de A, $y < x \Leftrightarrow \varphi(y) < \varphi(x)$, ce qui implique que $\varphi < [a, x[> \subset [a', \varphi(x)[$ et que $\varphi^{-1} < [a', \varphi(x)[> \subset [a, x[$, c'est-à-dire $[a', \varphi(x)[\subset \varphi < [a, x[>$, d'où $\varphi < [a, x[> = [a' , \varphi(x)[$. C.Q.F.D.

Lemme 3
Si deux ordinaux α et α' sont isomorphes, alors $\alpha = \alpha'$, et l'isomorphisme est l'application Id_α (ou simplement Id).

Démontrons-le par induction sur α. Soit φ un isomorphisme de α sur α'. Pour tout $\xi\in\alpha$, on pose $\xi' = \varphi(\xi)$. Soit $\beta\in\alpha$. Supposons que pour tout $\mu\in\beta$, $\mu' = \mu$. On a: $\varphi < [0, \beta[> = [0, \beta'[= \beta'$. Or $[0, \beta'[$ est l'ensemble des μ'

donc des μ , pour $\mu\in\beta$; donc $\beta' = \beta$. Donc pour tout $\beta\in\alpha$, $\varphi(\beta) = \beta$ d'où $\varphi = Id_\alpha$. Par conséquent $\alpha' = \varphi < \alpha > = Id_\alpha < \alpha > = \alpha$. C.Q.F.D.

Lemme 4
Soit B un segment initial de A. S'il existe un couple (τ, φ) , où τ est une collection ordinale et φ un isomorphisme de B sur τ , alors le couple (τ , φ) est unique. τ est alors appelé le **type d'ordre** de (B, <). τ sera aussi noté τ(B, <) ou τ(B) s'il n'y a pas d'ambiguïté sur < .

En effet, supposons qu'il existe un autre couple (τ' , ψ) solution. ψ^{-1} est un isomorphisme de τ' sur B et φ est un isomorphisme de B sur τ , donc $\varphi \text{ o } \psi^{-1}$ est un isomorphisme de τ' sur τ . On a alors d'après le lemme 3
$\tau' = \tau$ et $\varphi \text{ o } \psi^{-1} = Id$, d'où $\varphi = \psi$. C.Q.F.D.
L'unique isomorphisme φ est ici notée φ_B . Si B = [a, x[, avec $x\in A$, alors φ_B sera simplement noté φ_x. On dira ici, pour simplifier les propos, que "φ_B existe" pour signifier que B est isomorphe à une collection ordinale.

- THÉORÈME 1

Toute collection bien ordonnée est isomorphe à une collection ordinale.

Soit (A, <) une collection bien ordonnée. Utilisons le théorème 2.c pour construire une application f de A dans *On* qui établit un isomorphisme de (A, <) sur un segment initial τ de *On*. Désignons par a le minimum de A.

Soit $x \in A$. On suppose f définie pour tout $y \in [a, x[$ et qu'on a $f(y) = f < [a, y[>$. On a alors pour tout $y \in [a, x[$,
$f < [a, y[> = f(y) = [0, f(y)[$.
$\alpha = f < [a, x[>$ est transitif. En effet, soit $\beta \in \alpha$. Il existe $y \in [a, x[$ tel que $f(y) = \beta$, donc
$f < [a, y[> = \beta$. Soit $\xi \in \beta$. ξ est donc l'image d'un élément de [a, y[, donc d'un élément de [a, x[, donc $\xi \in \alpha$.

α est donc un ordinal, on pose alors $f(x) = \alpha$. f est donc entièrement définie sur A et on a pour tout $x\in A$,
$f < [a, x[> = \alpha = [0, \alpha[= [0, f(x)[$, ce qui montre que f est un isomorphisme de A sur $f < A > = \tau$.

La collection τ est transitive. En effet, soit $\alpha\in\tau$. α est l'image d'un élément x de A. On a $f < [a, x[> = \alpha$. Soit $\beta \in \alpha$. β est alors l'image d'un élément y de [a, x[, donc d'un élément de A, d'où $\beta\in\tau$. τ est donc une collection ordinale, qui est alors le *type d'ordre* de A. C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u>
Tout ensemble bien ordonné est isomorphe à un ordinal. Toute transcollection bien ordonnée (du premier degré) est isomorphe à *On*.

Soient (A, <) une collection bien ordonnée et $\tau = \tau(A)$, et f l'isomorphisme de A sur τ . Si A est un ensemble, comme $f < A > = \tau$, le schéma de compréhension assure alors que τ est un ensemble, donc un ordinal. Mais si A est une transcollection, alors $\tau = On$. En effet si τ est un ensemble, comme f est bijective, on a $f^{-1} <\tau > = A$, et le même schéma entraînerait donc que A est un ensemble, ce qui est contradictoire. C.Q.F.D.

- THÉORÈME 2

Soit (A, <) une collection bien ordonnée et soit $B \subset A$. L'ordre induit par R sur B est aussi noté < . On a alors $\tau(B) \leq \tau(A)$. Et si de plus B est majoré on a alors $\tau(B) < \tau(A)$.

Posons $\alpha = \tau(A)$ et $\beta = \tau(B)$. Désignons par a et b les plus petits éléments respectifs de A et B et par f et g les isomorphismes respectifs de A et B sur leurs types d'ordre. On a $g(b) = f(a) = 0$.
Montrons d'abord par induction que pour tout $x \in B$, on a $g(x) \leq f(x)$.
Supposons que pour tout $y \in B$ tel que $y < x$, on a $g(y) \leq f(y)$. On a aussi $f(y) < f(x)$ donc $g(y) < f(x)$, ce qui signifie que $g < [b, x[_B > \subset [0, f(x)[$ c'est-à-dire $[0, g(x)[\subset [0, f(x)[$ donc $g(x) \subset f(x)$, ou $g(x) \leq f(x)$.
Ensuite, puisque $f(x) \in \alpha$, pour $x\in A$, on a donc aussi $g(x) \in \alpha$, donc $g <B > = \beta \subset \alpha$, c'est-à-dire $\beta \leq \alpha$.

Si de plus B est majoré, il existe alors $m \in A$ tel que pour tout $x \in B$, on a $x < m$. On a alors $f(m) \notin \beta$. En effet supposons $f(m) = \mu \in \beta$. Alors il existe $u \in B$ tel que $g(u) = \mu$.. Comme $u < m$, on a également $f(u) < f(m)$. D'autre part comme $u \in B$, on a aussi $g(u) \leq f(u)$, donc $g(u) < f(m)$, c'est-à-dire $\mu < \mu$, ce qui est impossible. Donc $f(m) \notin \beta$, ce qui implique que $\beta \leq f(m)$. Comme $f(m) \in \alpha$, on a donc $\beta < \alpha$. C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u>

Si α est un ordinal et a une partie de α, alors $\tau(a) \leq \alpha$. Et si a est majoré, alors $\tau(a) < \alpha$.
Immédiat, car $\tau(\alpha) = \alpha$.

b. Construction de bons ordres

Examinons ici quelques façons d'obtenir un bon ordre à partir de bons ordres.

i. Bon ordre induit par équipotence.

Soit (A, <) une collection bien ordonnée et une collection A' équipotente à A et une bijection f de A sur A'. Pour tous éléments x' et y' de A' on définit la relation R' par : $x' <' y' \Leftrightarrow f^{-1}(x') < f^{-1}(y')$. On vérifie aisément que <' est une relation de bon ordre sur A'. f établit alors un isomorphisme de (A, <) sur (A', <'). Si (A, <) et on a $\tau(A) = \tau(A')$.
On remarquera que si le type d'ordre est imposé par (A, <), par contre l'ordre sur A' dépend du choix de la bijection f. En pratique A sera souvent une collection ordinale α. Dans ce cas on a bien entendu $\tau(A') = \alpha$.

ii. Produit lexicographique de deux collections bien ordonnées

Soient $(A_1, <_1)$, ... , $(A_n, <_n)$ n *collections ordonnées*, avec $n \geq 2$. On se propose de munir le produit $A = A_1 \times ... \times A_n$ d'un ordre noté $<^L$ et appelé le **produit lexicographique** des ordres $<_1$, ... , $<_2$.

La relation $<^L$ porte donc sur deux n-uplets $x = (x_1 , ... , x_n)$ et $y = (y_1 , ... , y_n)$. On pose :

$x <^L y \quad \Leftrightarrow \quad x \neq y$ **et** $x_k < y_k$, où k est le plus petit entier tel que $x_k \neq y_k$.

On vérifie aisément que $<^L$ est une relation d'ordre stricte sur A.

En particulier, si les $(A_i, <_i)$ sont des collections *bien* ordonnées, montrons alors que $<^L$ est un bon ordre sur A. En effet, soit $X = X_0$ une partie non vide de A. Pour tout i , avec $1 \leq i \leq n$, on considère la partie X_i des n-uplets de X_{i-1} ayant la plus petite projection d'indice i , notée e_i , au sens du bon ordre $<_i$ sur A_i. Le n- uplet $(e_1 , ... ,e_n)$ est alors le plus petit élément de X cherché.
En d'autres termes, on commence par retenir des éléments de X, ceux qui ont la plus petite des premières projections, puis dans ceux-ci ceux qui ont la plus petite des secondes projections, et ainsi de suite. En dernier, ceux qui restent de ce filtrage successif se différencient uniquement par leur n-ième projection. On retient alors celui qui possède la plus petite.

<u>*Remarque* :</u>
Les bons ordres $<_i$ sont supposés implicitement du premier degré. Cependant, le produit lexicographique $<^L$ ainsi obtenu n'est pas forcément du premier degré. A titre d'exemple, on peut considérer le produit sur On^2. Il est clair que la partie A des éléments de On^2 de la forme $(0, \alpha)$, avec $\alpha \in On$, est un segment initial strict de On^2 isomorphe à *On*, donc A ne peut être un ensemble, donc $<^L$ n'est pas du premier degré sur On^2 et plus généralement sur On^k.

iii. Fusionnement d'une famille bien ordonnée d'ensembles bien ordonnés

Soit une famille $[(A_i , <_i)]_{i\in I}$ une famille d'ensembles bien ordonnés indexée par un ensemble ordonné (I, <).
On suppose, pour éliminer les situations triviales, que I est non vide, ainsi que chaque A_i.
On se propose de munir d'un bon ordre $\prec$ la réunion $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ de la famille $(A_i)_{i\in I}$.
Soit un élément x de A. Appelons ici le rang de x , et notons-le r(x) , le plus petit indice k (au sens de l'ordre < sur I), tel que $x \in A_k$. Notons par A'_i l'ensemble des éléments de A de rang i . Il est clair que la famille $(A'_i)_{i\in I}$ est une partition stricte de A et que A'_i est une partie de A_i .
Soient x et y sont deux éléments de A. On définit sur A la relation $\prec$ par :
$x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad r(x) < r(y)$ **ou** $(r(x) = r(y) = k$ **et** $x <_k y)$

Vérifions que la relation $\prec$ ainsi définie est un bon ordre sur A. Soit une partie non vide X de A. On considère alors la partie Y des éléments de X de rang minimal m. Y est donc une partie de A'_m et donc de A_m . Il est alors évident que le plus petit élément de Y (au sens de l'ordre $<_m$ sur A_m) est le plus petit élément de A pour l'ordre $\prec$.

On dit que l'ordre $\prec$ est obtenu par **fusionnement** des ordres $<_i$.

Remarque :
Cette définition peut être étendue au cas particulier où I est un ensemble fini ou une collection infinie dénombrable et les A_i des collections. Dans ce cas, il ne s'agit pas d'une "famille" au sens restreint du terme, mais les raisonnements précédents restent valables.

iv. Exemples

1. Soit une collection bien ordonnée (C, <). Soit $\sigma(C)$ la collection des suites finies d'éléments de C. Soit $x = (c_1 , ... , c_n)$ un élément de $\sigma(C)$. C^n est donc la collection des suites finies de C de longueur n . On peut munir C^n du produit lexicographique, qu'on notera $<_n^L$. Les C^n opèrent une partition sur $\sigma(C)$, donc le rang de tout élément x de C^n n'est autre que sa longueur. Par fusionnement des ordres $<_n^L$, on muni $\sigma(C)$ d'un bon ordre $\prec$.

   Ici également, la relation $\prec$ peut ne pas être du premier degré, bien que (C, <) est supposé l'être .

2. Soit une collection ordinale θ . On se propose de munir $\sigma(\theta)$ d'une relation de bon ordre du *premier degré*, notée $\prec$, d'une façon différente de la précédente, mais en utilisant aussi l'ordre lexicographique $<^L$.
   Soit $x = (\alpha_1 , ... , \alpha_n)$ un élément de $\sigma(\theta)$. Notons par sup(x) le plus grand des α_i , qu'on appellera ici le maximum de x, et $l(x) = n$ la longueur de x

   Pour deux élément x et y de $\sigma(\theta)$, on pose : $x \prec y$ si et seulement si l'une des trois conditions suivantes (qui s'excluent mutuellement) est vérifiée :
   - $\sup(x) < \sup(y)$
   - $\sup(x) = \sup(y)$ **et** $l(x) < l(y)$
   - $\sup(x) = \sup(y)$ **et** $l(x) = l(y)$ **et** $x <^L y$.

   Il est aisé de constater que deux éléments x et y de $\sigma(\theta)$ sont toujours comparables pour $\prec$, puisque x et y sont comparables par leurs maxima, à défaut par leurs longueurs et à défaut par l'ordre lexicographique.
   0 est bien sûr le plus petit élément de $\sigma(\theta)$.

   Soit un élément x de $\sigma(\theta)$. Montrons que la collection, notée [0, x[, des éléments y de $\sigma(\theta)$ tels que $y \prec x$ est un ensemble. En effet, soit $\mu = \sup(x)$. Il est clair que $\sup(y) \leq \mu$, donc $y \in \sigma(\mu+1)$ qui est un ensemble, et par conséquent [0, x[qui est donc un sous-ensemble de $\sigma(\mu+1)$, ce qui montre que les éventuels segments initiaux stricts de $\sigma(\theta)$ sont des ensembles.
   Soit une partie non vide X de $\sigma(\theta)$. Montrons que X admet un plus petit élément pour $\prec$. En effet, soit Y la partie des éléments de X ayant le plus petit des maxima des éléments de X et soit Z la partie des éléments Y ayant la plus petite des longueurs des éléments de Y. Il ne nous reste qu'à effectuer une dernière sélection dans Z au moyen de l'ordre lexicographique $<^L$, qui nous fournit alors le plus petit élément z de Z, qui est évidemment le plus petit élément de X.
   $\prec$ est donc une relation de bon ordre, qui de plus est du premier degré. C.Q.F.D.

   En particulier, si $\theta = On$, comme $\sigma(On)$ n'est évidemment pas un ensemble, on en déduit immédiatement que $\sigma(On)$ est isomorphe à *On*, et on notera *J* cet isomorphisme.
   De même si $\theta = \omega$, pour tout $x \in \sigma(\omega)$, comme $[0, x[\subset \sigma(\mu+1)$, avec $\mu = \sup(x)$ qui est un ordinal fini, le segment initial strict [0, x[est donc un ensemble fini donc est isomorphe à un ordinal fini. On en déduit immédiatement que $\sigma(\omega)$ est isomorphe à ω.

4. Les cardinaux

a. Théorème de Cantor-Bernstein

Lemme 1
Soient un ensemble A et une application φ de $\mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{P}(A)$ croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire telle que pour toutes parties X et Y de A on ait: $X \subset Y \Rightarrow \varphi(X) \subset \varphi(Y)$. Alors il existe une plus petite partie E de A telle que
$\varphi(E) = E$.

<u>Démonstration :</u>

Soit W l'ensemble des parties X de A telles que $\varphi(X) \subset X$. W n'est pas vide car il est clair que $\varphi(A) \subset A$. Alors soit E = inter (W) . On a $E \in W$. En effet pour tout $Z \in W$, on a $E \subset Z$, donc $\varphi(E) \subset \varphi(Z)$. Comme $\varphi(Z) \subset Z$, on a donc $\varphi(E) \subset Z$, d'où $\varphi(E) \subset E$. Nous avons donc par la même occasion montré que E est le plus petit élément de W.
Montrons à présent que $E \subset \varphi(E)$. En effet, comme $\varphi(E) \subset E$, on a donc $\varphi(\varphi(E)) \subset \varphi(E)$ donc $\varphi(E) \in W$, d'où $E \subset \varphi(E)$. On a donc en définitive $\varphi(E) = E$. C.Q.F.D.

Lemme 2
Soient deux ensembles A et B, f une application de A dans B et g une application de B dans A. Il existe deux parties A_1 et A_2 de A et deux parties B_1 et B_2 de B telles que :
$A_2 = A - A_1$; $B_2 = B - B_1$; $B_1 = f < A_1 >$; $A_2 = g < B_2 >$.

Démonstration :
Définissons l'application φ de $\mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{P}(A)$ par : $\varphi(X) = A - g < B - f < X > >$. Montrons que φ est croissante.
Si X et Y sont deux parties de A, si $X \subset Y$, alors $f < X > \subset f < Y >$ donc $B - f < Y > \subset B - f < X >$, donc $g < B - f < Y > > \subset g < B - f < X > >$ donc $A - g < B - f < X > > \subset A - g < B - f < Y > >$, c'est-à-dire $\varphi(X) \subset \varphi(Y)$.
D'après le lemme précédent, il existe une partie E de A telle que $\varphi(E)= E$. On pose alors $A_1 = E$. On a donc
$A_1 = A - g < B - f < A_1 > >$ d'où $A - A_1 = A - (A - g < B - f < A_1 > >) = g < B - f < A_1 > >$

On peut alors poser $A_2 = A - A_1$; $B_1 = f < A_1 >$; $B_2 = B - f < A_1 >$. On a alors $B_2 = B - B_1$ et $A_2 = g < B_2 >$.
C.Q.F.D.

- THÉORÈME **de Cantor-Bernstein**.

Étant donnés deux ensembles A et B, s'il existe une injection f de A dans B et une injection g de B dans A, alors A et B sont équipotents.

Démonstration :
D'après le lemme précédent, il existe deux parties A_1 et A_2 de A et deux parties B_1 et B_2 de B telles que :
$A_2 = A - A_1$; $B_2 = B - B_1$; $B_1 = f < A_1 >$; $A_2 = g < B_2 >$.

On notera par f ' la restriction de f à A_1 et par g' la restriction de g à B_2. Il est clair que f ' est une bijection de A_1 sur B_1 tandis que g ' est une bijection de B_2 sur A_2 . Ceci nous suggère alors de définir une application h de A dans B telle que pour tout $x \in A$:

- Si $x \in A_1$ alors $h(x) = f'(x)$.
- Si $x \in A_2$ alors $h(x) = g'^{-1}(x)$.

Comme A_1 et A_2 sont disjoints, de même que B_1 et B_2 , il est alors évident que h est une bijection de A sur B.

b. Propriétés élémentaires des collections cardinales

On dira d'une **collection** *ordinale* α qu'elle est **cardinale** si elle n'est équipotente à aucun de ses éléments. Si α est un ensemble, alors on dit que α est un **cardinal**. Il est facile de vérifier que les ordinaux finis sont des cardinaux. ω est donc la collection des cardinaux finis. C'est la plus petite collection cardinale infinie (elle ne peut être équipotente à un entier fini).

On dira d'une collection X qu'elle est *cardinable* si elle est équipotente à une collection ordinale. Il existe alors une plus petite collection ordinale α équipotent à X. α est appelé la *collection cardinale* de X (ou le *cardinal* de X si X est un ensemble), et on la note $|\mathbf{X}|$ ou **Card(X)** ou **Card X**, ce qui généralise ces notions introduites pour les ensembles finis.

On a donc pour toute collection ordinale α, $|\alpha| \leq \alpha$, et si α est cardinale, on a $|\alpha| = \alpha$. Il est clair qu'aucun élément de *On*, donc aucun ordinal, ne peut être équipotent à *On*. Le schéma de remplacement impliquerait alors que *On* est un ensemble. Donc $|On| = On$.

Lemme 1
Soient α et β deux cardinaux. Si α inj β , alors $\alpha \leq \beta$.

En effet, si $\alpha > \beta$, alors $\beta \subset \alpha$ donc β inj α , ce qui d'après le théorème de Cantor-Bernstein implique que α éqp β, ce qui contredit le fait que α est un cardinal. C.Q.F.D.
On en déduit que si α inj β et β inj α, alors $\alpha = \beta$.

Lemme 2
Soient X et Y deux ensembles cardinables. On a : $|X| \leq |Y| \Leftrightarrow X$ inj Y

En effet, $|X| \leq Y \Rightarrow |X| \subset |Y| \Rightarrow |X|$ inj $|Y|$. Comme par définition
$|X|$ éqp X et $|Y|$ éqp Y , on a donc: X inj $|X|$ inj $|Y|$ inj Y , donc X inj Y.
Réciproquement, comme X inj $|X|$ et Y inj $|Y|$, on a donc : X inj Y $\Rightarrow |X|$ inj $|Y|$ donc d'après le lemme 1 on a $|X| \leq |Y|$.

Lemme 3
La réunion d'un ensemble de cardinaux est un cardinal.

Soit une collection X de cardinaux et α = réu (X). L'ordinal α est la borne supérieure de X. Supposons que α est équipotent à un de ses éléments β. β appartient nécessairement à un élément γ de X. On a donc α éqp β et $\beta \subset \gamma$ donc α inj γ . D'autre part on a $\gamma \subset \alpha$, donc γ inj α , donc α éqp γ. Comme α éqp β, on a donc aussi γ éqp β, ce qui contredit le fait que γ est un cardinal (puisqu'il est équipotent à son élément β). C.Q.F.D.
On en déduit le

Lemme 4
La collection des cardinaux n'est pas un ensemble.

Car si cette collection était un ensemble X, la réunion κ de X serait un cardinal. Tout ordinal est alors équipotent à une partie de κ . Soit B la collection des bons ordres r sur une partie a de κ. Comme r est une partie de a^2, on a donc aussi
$r \subset \kappa^2$, donc $r \in \mathcal{P}(\kappa^2)$, donc B est un ensemble. Soit un ordinal α et f une bijection de α sur une partie a de κ. Dans ce cas, f induit sur a un bon ordre r dont le type est α . On peut définir l'application τ de B dans *On*, qui à tout élément r de B associe le type de r. Il est clair que Im $\tau = \tau < B > =$ *On* puisque tout ordinal est un type d'ordre. Comme B est un ensemble, il en résulte que *On* est un ensemble, ce qui est impossible.

5. Axiome des univers

Nous pouvons maintenant aborder la notion d'univers. Nous avons jusqu'ici opéré dans l'*univers* $\mathcal{U}$ des ensembles. Le but de la notion d'*univers* est de créer au sein de $\mathcal{U}$ des ensembles offrant eux-mêmes un cadre pour une théorie des ensembles. Chaque univers U est un élément d'un autre univers U' qui se trouve alors être une théorie des ensembles plus forte que U.

Définition 1
Soit un ensemble U et soit $x \in U$. $\mathcal{P}_U(x)$ est l'ensemble des parties de x appartenant à U. Autrement dit ,
$\mathcal{P}_U(x) = \mathcal{P}(x) \cap U$.

Définition 2
On dit d'une **collection** U qu'elle est **universelle** si elle vérifie les conditions suivantes :

(U_1) $\varnothing \in U$.
(U_2) U est transitif.
(U_3) Pour tout $x \in U$, $\mathcal{P}_U(x) \in U$.
(U_4) Pour tout $x \in U$, réu $(x) \in U$.
(U_5) Pour tout $I \in U$ et pour toute application f de I dans U, $f < I > \in U$.

Si U est un ensemble, alors on dit que U est un **univers**.
Il est clair que $\mathcal{U}$ est une collection universelle.

Remarque :
La collection *x est un univers* peut être exprimée par une formule élémentaire à un argument qu'on notera $x \in Uv$, car toutes les notions qui interviennent dans la définition peuvent être exprimées par des formules.

Définition 3
On dira de *tout* univers U qu'il est un **0- univers**. Soit un ordinal α. On dira de U qu'il est un **α- univers** si pour tout $x \in$ U et pour tout $\beta < \alpha$, x appartient à un *β- univers* appartenant à U.

<u>Remarque :</u>
Aucun univers ne peut être exhibé dans un modèle central. On peut remarquer que sans (U_1) , $\varnothing$ serait un α-univers pour tout ordinal α. Cette condition élimine donc ce cas trivial. Au lieu de (U_1), il aurait été équivalent d'exiger d'un univers qu'il soit non vide. L'existence de α- univers non vides est assurée par l'axiome suivant qui est l'axiome caractéristique de cette théorie :

a. Axiome des α- univers

A_6 . ***Pour tout ordinal α, tout ensemble appartient à un α- univers.***

Cet axiome apparemment anodin permet l'existence d'ensembles effroyablement colossaux. Nous examinerons en particulier les conséquences de ce théorème qui en découle immédiatement :

- THÉORÈME **des univers**.

Tout ensemble appartient à un univers

Trivial puisqu'un α- univers est un univers. Plus généralement, on peut constater que si U est un α- univers, alors pour tout ordinal $\beta < \alpha$, U est un β- univers.
On dira d'un α- univers U qu'il est **d'immensité α** si U n'est pas un α+1- univers. Il est alors clair que pour tout ordinal $\nu > \alpha$, U n'est pas un ν- univers.
Pour un ordinal α, la collection des α- univers est notée *Uv*(α). On a donc *Uv*(0) = *Uv*.

b. Propriétés fondamentales d'un univers

Lemme 1
Soit un ordinal α et soit un ensemble X. Il existe un α- univers U incluant X.

En effet, d'après l'axiome précédent, il existe un α- univers U contenant X . Comme U est transitif, alors U inclut X.

Lemme 2
U étant une collection universelle, si $a \in$ U, alors toute partie de a est un élément de U et $\mathcal{P}(a) \in$ U.

En effet, soit $b \subset a$. Soit la relation R(x, y) : $x \in b$ **et** x = y. Il est clair que R est fonctionnelle. Notons-la y = f(x). f < a > est défini par la relation $x \in$ a **et** y = f(x) soit $x \in a$ **et** $x \in b$ **et** y = f(x) soit $x \in b$ **et** x = y , soit $y \in b$, d'où f < a > = b. Comme $a \in$ U, on a d'après (U_5), f < a > $\in$ U , donc $b \subset$ U.
On en déduit que $\mathcal{P}(a) \subset$ U, donc $\mathcal{P}_U(a) = \mathcal{P}(a) \cap U = \mathcal{P}(a)$ d'où $\mathcal{P}(a) \in$ U. C.Q.F.D.

En effet, $\mathcal{P}(a) \in$ U. U étant transitif, $\mathcal{P}(a) \subset$ U.

Lemme 3
U étant une collection universelle, si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de U indexée par un élément I de U, alors la réunion $\bigcup_{i \in I} x_i$ est un élément de U.

Ceci découle immédiatement de (U_4) et (U_5). En effet $\bigcup_{i \in I} x_i$ = réu (x < I >) = réu ($\{x_i\}_{i \in I}$), où x est l'application de I dans U définie par $x(i) = x_i$, pour $i \in I$.

- THÉORÈME 1

Toute collection universelle satisfait l'axiome de l'ensemble vide et l'axiome d'extensionnalité.

Soit une collection universelle U. L'axiome de l'ensemble vide dans U découle directement de (U_1). Et comme U est transitif, il satisfait donc l'axiome d'extensionnalité.

- THÉORÈME 2

Toute collection universelle satisfait l'axiome de la réunion.

C'est ce qu'exprime (U_4).

- THÉORÈME 3

Toute collection universelle satisfait l'axiome de l'ensemble des parties.

Cet axiome interprété dans une collection universelle U se formule : *Pour tout* $x \in$ U, *il existe un élément de* U *dont les éléments sont les parties de* x **appartenant à U**. Le lemme 2 assure que toute partie de x est un élément de U, donc l'axiome est satisfait à cause de (U_3).

Définition

On considère une relation binaire R(x, y) de la forme $x \in U$ **et** $y \in U$ **et** r(x, y) , où r(x, y) est une relation binaire restreinte à U. (Alors tous les paramètres de r(x, y) sont des éléments de U et tous ses quantificateurs existentiels sont de la forme $\exists x \in U$ et ses quantificateurs universels de la forme $\forall x \in U$). Si R(x, y) est fonctionnelle dans $\mathcal{U}$, alors on dit que R(x, y) est une relation *U-fonctionnelle*. En notant R(x, y) par y = f(x) , f est donc une *U-fonction.*

- THÉORÈME 4

Toute collection universelle U satisfait le schéma de remplacement.

Autrement dit : *Pour toute* U-*fonction et pour tout* $I \in U$, **f < I >** $\in$ U.

Immédiat, car f est une $\mathcal{U}$ -fonction , donc (U_5) assure que f < I > $\in$ U.

U est donc un modèle central. Cela veut dire que tous les résultats obtenus jusqu'ici sur la base des axiomes d'un tel modèle peuvent être transposés dans U. En particulier si a et b sont des éléments de U, alors la paire {a, b} est un élément de U. La réunion de deux éléments de U est un élément de U, ce qui donne le

- THÉORÈME 5 : **Théorème de l'infini.**

La collection ω des ordinaux finis est un ensemble.

En effet, soit un univers U. $\varnothing = 0 \in U$. Soit un ordinal fini n. Si $n \in U$, alors $\{n\} \in U$, donc $n \cup \{n\} \in U$, c'est-à-dire $n+1 \in U$. La collection ω des ordinaux finis est donc un sous-ensemble de U, donc est un ensemble. C.Q.F.D.

L'énoncé : *Il existe un ensemble x contenant* $\varnothing$ *et tel que pour tout* $y \in x$ *, on ait* $y \cup \{y\} \in x$ constitue l'***axiome de l'infini***, qui bien sûr ici est un théorème. La formule correspondante est :

$\exists x\ \mathbf{[}\ (\exists y \in x)[\forall z (z \notin y)]$ **et** $(\forall t \in x)(\exists u \in x)[\forall v\ (v \in u \Leftrightarrow v \in t$ **ou** $v = t)]\ \mathbf{]}$

L'axiome des univers implique qu'il existe des univers contenant ω. Il est clair que de tels univers satisfont alors l'axiome de l'infini.

c. Transparties d'un univers

Définition

Soit U une collection universelle et A une partie de U. On dit que A est une **transpartie** de U si A n'est pas un élément de U.

Il est clair que la notion de *transpartie* pour une collection universelle U, généralise celle de *transcollection* dans le cas particulier de $\mathcal{U}$.

Lemme 1

Pour toute collection universelle U, U et *On*(U) sont des transparties de U.

Si $U \in U$, nous aurions le paradoxe de Russell. En effet, U étant un univers, toute partie de U est aussi élément de U. En particulier, soit la partie C des éléments x de U tels que $x \notin x$. On a $C \in U$. On alors $C \in C \Leftrightarrow C \notin C$.
Et si $On(U) \in U$, on aurait $On(U) \in On(U)$, ce qui est impossible pour une collection ordinale. C.Q.F.D.
Ce lemme généralise le fait que $\mathcal{U} \notin \mathcal{U}$ et $On \notin \mathcal{U}$.

Lemme 2
Soit U une collection universelle et X une partie de U. X est un élément de U si et seulement si X est équipotent à un élément de U.

Si X est un élément de U, il est clair que X est équipotent à un élément de U.
Réciproquement, supposons que X est une partie de U équipotente à un élément I de U. Soit φ une bijection de I sur X. D'après (U_5) l'ensemble $\varphi< I > = \{\varphi(i)\}_{i\in I}$,qui n'est autre que X, est un élément de U.

Proposition
U étant une collection universelle, ***On*(U)** est une collection ordinale. On l'appelle le **transordinal** de U. *On*(U) est une collection ordinale limite et est une collection cardinale. Pour cette raison, on l'appelle aussi le **transcardinal** de U.

Posons $\theta = On(U)$. θ est effectivement une collection ordinale car θ est l'ensemble des ordinaux du modèle central U. θ est limite car si θ avait un prédécesseur α, on aurait bien évidemment $\alpha \in U$, donc $\theta = \alpha+1 \in U$, ce qui est impossible. Enfin, θ est une collection cardinale. La preuve en est que si il existait parmi les collections ordinales équipotentes à θ une collection ordinale α plus petite que θ, α serait donc un élément de θ donc de U. θ étant dès lors équipotente à un élément de U, le lemme précédent assure que θ est un élément de U, ce qui est contradictoire. C.Q.F.D.

d. Axiome d'uniformité

On peut remarquer que dans un modèle central, sans l'axiome de l'ensemble vide ou sans un axiome impliquant l'existence d'au moins un ensemble, on ne peut exhiber le moindre ensemble. Mais dès que l'on dispose d'un ensemble a, on peut en "construire" d'autres à partir de a. Le dernier axiome que nous allons introduire aura, entre autres, pour conséquence que tout ensemble peut être obtenu à partir de l'ensemble vide.

Définition
Soit une collection X qui (munie de la relation $\in$) est un modèle central et soit Y une partie de X.
On dit que Y (munie de la relation $\in$) est un **modèle intérieur** de X si Y est un modèle central tel que $On(X) \subset Y$.

L'axiome que introduisons maintenant uniformise les trois notions de *modèle central*, de *collection universelle*, et de *modèle intérieur*. Il s'énonce :

A_7 . ***Tout modèle central est soit $\mathcal{U}$, soit un univers.***

Lemme 1
Pour qu'une collection X soit une collection universelle, il faut et il suffit qu'elle soit un modèle central.

En effet, si X est une collection universelle, il a été établi qu'alors X est un modèle central. Inversement, si X est un modèle central, alors d'après l'axiome précédent, X est soit $\mathcal{U}$, soit un univers qui sont des collections universelles.

Lemme 2
Tout modèle intérieur de $\mathcal{U}$ est égal à $\mathcal{U}$.

En effet, U étant un modèle intérieur de $\mathcal{U}$, U inclut *On* , donc ne peut être un univers.

III . La collection universelle V. Le théorème de fondation

Ici l'examen de la hiérarchie cumulative des ensembles en liaison avec les univers.

1. Propriétés fondamentales de la collection V

a. Définition

Soit une collection universelle U. On définit par induction l'application V suivante de $\theta = On(U)$ dans U :

V(0) = ∅

Pour un ordinal $\alpha \in \theta$, $\mathbf{V(\alpha) = V_\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}[\,\mathbf{V(\beta)}\,]$

La réunion des V_α est notée $V_\theta = V_{On(U)}$, ou V(U) ou encore tout simplement V s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la collection universelle U. Du reste, il est clair que si U est univers, l'application ainsi définie de θ dans U est la restriction à θ de la même application définie de *On* dans $\mathcal{U}$.

b. Propriétés fondamentales

Lemme 1

Si $\beta \leq \alpha$ alors $V_\beta \subset V_\alpha$. Si $\beta < \alpha$ alors $V_\beta \in V_\alpha$.

En effet, $V_\alpha = \bigcup_{\mu<\alpha} \mathcal{P}(V_\mu) = \bigcup_{\mu<\beta} \mathcal{P}(V_\mu) \cup \bigcup_{\beta\leq\mu<\alpha} \mathcal{P}(V_\mu)$.

Or $\bigcup_{\mu<\beta} \mathcal{P}(V_\mu) = V_\beta$ donc $V_\beta \subset V_\alpha$.

Si $\beta < \alpha$, on a évidemment $\mathcal{P}(V_\beta) \subset V_\alpha$. Comme $V_\beta \in \mathcal{P}(V_\beta)$, on en déduit que $V_\beta \in V_\alpha$. C.Q.F.D.

On en déduit que $\varnothing \in$ V. En effet, pour tout ordinal non nul α, $\varnothing = V_0 \in V_1 \subset V_\alpha \subset V$.
Il est clair que cela signifie que V satisfait l'axiome de l'ensemble vide.

Lemme 2

Pour tout ordinal α, on a $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ et pour tout ordinal limite λ on a $V_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta$.

En effet, $V_{\alpha+1} = \bigcup_{\beta<\alpha+1} \mathcal{P}(V_\beta) = \bigcup_{\beta\leq\alpha} \mathcal{P}(V_\beta)$. Comme $\beta\leq\alpha$, d'après le lemme 1, on a donc $V_\beta \subset V_\alpha$, donc $\mathcal{P}(V_\beta) \subset \mathcal{P}(V_\alpha)$, donc $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$. On en déduit aussi que si λ est un ordinal limite, on a $V_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \mathcal{P}(V_\beta) = \bigcup_{\beta<\lambda} V_{\beta+1} = \bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta$.

Définition 3

x étant un élément de V, on appelle **rang** de x, et on note **rg(x)** le plus petit ordinal α tel que $x \in V_\alpha$.

On peut remarquer que α est obligatoirement un successeur. S'il était un ordinal limite, le lemme 2 impliquerait qu'il existe un ordinal $\beta < \alpha$ tel que $x \in V_\beta$, ce qui contredit le caractère minimal de α.

Proposition 1

Pour tout $x \in$ V, tout élément y de x est dans V, et rg(y) < rg(x).

En effet, Soit $x \in V$ et soit $\alpha = rg(x)$. Donc $x \in V_\alpha$. Par définition de V_α, il existe $\beta < \alpha$ tel que $x \in \mathcal{P}(V_\beta)$, donc $x \subset V_\beta$. Soit $y \in x$. On a donc $y \in V_\beta$. Donc $rg(y) \leq \beta < \alpha$. C.Q.F.D.

Donc V est transitif. On a donc le :

<u>Corollaire</u>

α étant un ordinal V_α est transitif.

En effet, si $x \in V_\alpha$, alors $\mu = rg(x) \leq \alpha$. Si $y \in x$, comme $\nu = rg(y) < rg(x)$, on a d'après le lemme 1 $V_\nu \subset V_\mu \subset V_\alpha$, donc $y \in V_\alpha$.

On en déduit aussi que V satisfait l'axiome d'extensionnalité, comme c'est d'ailleurs le cas de toute collection transitive.

Proposition 2

Soit un ordinal α. Pour tout $x \in V_\alpha$, réu $(x) \in V_\alpha$.

En effet, $\beta+1 = rg(x) \leq \alpha$. Donc $x \in V_{\beta+1}$, donc $x \subset V_\beta$. Soit $y \in x$. On a donc $y \in V_\beta$. Comme V_β est transitif, on a $y \subset V_\beta$. Donc réu $(x) \subset V_\beta$, donc réu $(x) \in V_{\beta+1}$. Comme $\beta+1 \leq \alpha$ on a donc $V_{\beta+1} \subset V_\alpha$, d'où réu$(x) \in V_\alpha$. C.Q.F.D.

V satisfait donc l'axiome de la réunion.

Proposition 3

α étant un ordinal, pour tout $x \in V_\alpha$, $\mathcal{P}(x) \in V_{\alpha+1}$.

En effet, $\beta+1 = rg(x) \leq \alpha$. Donc $x \in V_{\beta+1}$, donc $x \subset V_\beta$, donc $\mathcal{P}(x) \subset \mathcal{P}(V_\beta)$, donc $\mathcal{P}(x) \subset V_{\beta+1}$, c'est-à-dire $\mathcal{P}(x) \in V_{(\beta+1)+1} \subset V_{\alpha+1}$. C.Q.F.D.

On en déduit immédiatement le :

<u>Corollaire 1</u>

α étant un ordinal limite, pour tout $x \in V_\alpha$, $\mathcal{P}(x) \in V_\alpha$.

En effet, il existe $\beta<\alpha$ tel que $x \in V_\beta$. On a $\mathcal{P}(x) \in V_{\beta+1} \subset V_\alpha$.

<u>Corollaire 2</u>

V satisfait l'axiome de l'ensemble des parties.

Il s'agit de montrer que si a est un élément de V, l'ensemble b des parties de x *qui sont dans* V est un élément de V.

Soit $\alpha = rg(a)$. D'après la proposition précédente, $\mathcal{P}(a) \in V_{\alpha+1}$. Et comme $V_{\alpha+1}$ est transitif, on a donc $\mathcal{P}(a) \subset V_{\alpha+1}$, ce qui veut dire que toute partie de a est dans V. Donc $b = \mathcal{P}(a)$, donc $b \in V_{\alpha+1}$. C.Q.F.D.

Proposition 4

Pour tout $a \in U$, si $a \subset V$, alors $a \in V$.

Du fait que θ est un ordinal limite, on a : $V = V_\theta = \bigcup_{\beta<\theta} V_\beta$. Comme $a \subset V_\theta$, tout élément x de a appartient à un V_β donc $rg(x) \in \theta$. Soit l'ensemble $r = \{rg(x)\}_{x\in a}$. Comme $a \in U$ et comme U est une collection universelle, il est clair que $r \in U$, ce qui implique que $\rho =$ réu $(r) \in U$, donc $\rho \in \theta$. Pour tout $x \in a$, on a $x \in V_\rho$. Il en résulte que $a \subset V_\rho$, d'où $a \in \mathcal{P}(V_\rho) = V_{\rho+1}$, donc $a \in V_\theta$. C.Q.F.D.

Proposition 5

Tout ordinal α est un élément de V, et $rg(\alpha) \leq \alpha+1$.

Soit un ordinal α. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, on a $\beta \in V$ et $rg(\beta) = \beta+1$. Comme α est une partie de V, le corollaire précédent implique que $\alpha \in V$ et que $\alpha \in V_{\rho+1}$, où ρ est la borne supérieure des $\beta+1$. Pour tout $\beta<\alpha$, on a $\beta+1 \leq \alpha$ donc $\rho = \alpha$, donc $\alpha \in V_{\alpha+1}$, donc $rg(\alpha) \leq \alpha+1$.

Proposition 6
V satisfait le schéma de remplacement.

En effet, soit f une fonction *dans V* (donc telle que $y = f(x)$ soit un énoncé restreint à V) et soit $a \in V$. L'ensemble $f < a >$ est une partie de V donc, d'après le la proposition 4, est un élément de V.

c. Le théorème de fondation

- THÉORÈME 1
  $V_{On} = \mathcal{U}$.

En effet, V satisfait les axiomes d'extensionnalité (proposition 1), de l'ensemble vide (lemme 1), de la réunion (proposition 2), de l'ensemble des parties (proposition 3), et le schéma de remplacement (proposition 6). V est donc un modèle central. De plus V contient tous les ordinaux de U. Donc V est un modèle intérieur de U. Si $U = \mathcal{U}$, alors le lemme II. 5. d. 2 implique que $V = \mathcal{U}$. C.Q.F.D.

Tout ensemble possède un rang. On en déduit le

- THÉORÈME 2 : **Théorème de fondation**.

Pour tout ensemble non vide x il existe $y \in x$ *tel que* $x \cap y = \varnothing$.

Autrement dit, x possède un élément y n'ayant aucun élément commun avec x.
On considère l'ensemble r des rangs des éléments de x et ρ le minimum de r. Soit y un élément de x de rang ρ. Tout élément de y est de rang strictement inférieur à ρ donc ne peut être un élément de x. C.Q.F.D.

L'énoncé de ce théorème constitue l'***axiome de fondation***. Sa formule est :
$\forall x\ [\ \exists z\ (z \in x) \Rightarrow (\exists y \in x)[\forall t(\ t \notin x$ **ou** $t \notin y)]\ ]$

<u>Corollaire:</u>
Toute collection transitive X satisfait l'axiome de fondation.

En effet, soit un élément non vide x de X. Il faut montrer que x possède un élément y *appartenant à* X, tel que x et y n'aient aucun élément commun *dans* X. Le théorème de fondation implique qu'il existe un élément y de x n'ayant aucun élément commun avec x. X étant transitive y est aussi un élément de X. Et puisque x et y n'ont aucun élément commun, ils n'ont à fortiori aucun élément commun dans X.

En particulier tout univers U satisfait l'axiome de fondation.

d. Modèle de Zermelo-Fraenkel

On dira dune théorie des ensembles qu'elle est un modèle de Zermelo-Fraenkel (en abrégé ZF) si elle satisfait :
- l'axiome d'extensionnalité
- l'axiome de l'ensemble vide
- l'axiome de la réunion
- le schéma de remplacement
- l'axiome de l'ensemble des parties
- l'axiome de l'infini
- l'axiome de fondation.

ZF est donc un modèle central satisfaisant l'axiome de l'infini et l'axiome de fondation.
$\mathcal{U}$ est donc un modèle de ZF. Si un univers U contient ω, alors U est aussi un modèle de ZF.

2. Clôture transitive d'un ensemble

a. Généralités

Soient x , y deux collections et n un entier. On écrira $\mathbf{x \in_n y}$, ou $\mathbf{y \ni_n x}$ pour signifier que x est un subélément d'ordre n de y. On écrira $\mathbf{x \in_\bullet y}$ ou $\mathbf{y \ni_\bullet x}$ pour signifier que x est un subélément y. Par définition, $x \in_0 y$ signifie $x = y$ et $x \in_1 y$ signifie $x \in y$. Il est clair que si $x \in_m y$ et $y \in_n z$, alors $x \in_{m+n} z$, donc la relation de subappartenance $\in_\bullet$ est transitive.

$sb_n(x)$ désignera la collection des subéléments d'ordre n de x, pour n > 0.
$sb_0(x) = \{x\}$ si x est un ensemble.

Lemme
La clôture transitive de x , Cl(x) , est un ensemble.

En effet :
$sb_0(x) = \{x\}$
$sb_1(x) = x$
$sb_2(x) =$ réu (x)
Supposons que $sb_n(x)$ est un ensemble pour un entier n. Alors $sb_{n+1}(x) =$ réu ($sb_n(x)$) est aussi un ensemble.
La réunion des $sb_n(x)$, pour $n\in\omega$, est donc un ensemble qui est l'ensemble des subéléments de x. On l'appelle la clôture transitive *large* de x, et on la note **CL(x)**. On a $CL(x) = Cl(x) \cup \{x\}$ et $Cl(x) = CL(x) - \{x\}$
Donc Cl(x) est un ensemble. C.Q.F.D.

Remarque :
Si x n'est pas un ensemble, CL(x) n'est pas défini puisque $sb_0(x)$ n'est pas défini. En revanche $sb_n(x)$ est une collection pour n > 0. Donc Cl(x), qui est la réunion des $sb_n(x)$, est défini.

Il est alors facile d'établir les résultats suivants qui s'étendent aux collections :
- Si x est transitive alors Cl(x) = x.
- Si $y \in_n x$, alors $y \subset Cl(x)$, car les éléments d'un subélément de x sont des subéléments stricts de x.
- Si $y \in_n x$, alors $Cl(y) \subset Cl(x)$, car les subéléments stricts d'un subélément de x sont des subéléments stricts de y.
- $Cl(x) = x \cup$ réu (Cl < x >) , car les subéléments stricts de x sont les éléments de x et les subéléments stricts des éléments de x.
- Si $y \subset x$, alors $Cl(y) \subset Cl(x)$

b. Branches et arbres de fondation

Définition 1
Soit un n+1-uplet $b = (a_0 , ... , a_n)$ tel que l'on ait : $a_0 \ni a_1 \ni ... \ni a_n$. L'ensemble a_i est donc un subélément d'ordre i de a_0 . La suite b est alors appelée une *branche (finie) d'appartenance* (relative à a_0). n+1 est la longueur de la branche. Si de plus $a_n = \emptyset$, on dit alors que b est une *branche de fondation* (relative à a_0).

Supposons qu'il existe une suite infinie d'ensembles $b = (a_n)_{n\in\omega}$ telle que pour tout entier n, on ait $a_n \ni a_{n+1}$. Alors b est appelée une *branche (infinie) d'appartenance* (relative à a_0).

Une conséquence du théorème de fondation est le

- THÉORÈME 1

Il n'existe pas de branche d'appartenance infinie.

En effet supposons qu'il existe une branche d'appartenance infinie $b = (a_n)_{n\in\omega}$. Soit alors l'ensemble $A= \{a_n\}_{n\in\omega}$. Alors pour tout entier n , on a $a_{n+1} \in A$ et $a_{n+1} \in a_n$, donc $a_{n+1} \in A \cap a_n$. A possède donc un élément commun avec chacun de ses éléments, ce qui contredit le théorème de fondation. C.Q.F.D.
On déduit de ce théorème le

Corollaire 1

Aucun ensemble n'appartient à lui-même. Et plus généralement, aucun ensemble n'est un subélément *strict* de lui-même.

En effet, si pour un ensemble a on avait: $a \ni a$, alors il existerait une suite, la suite constante $(a_n = a)_{n\in\omega}$ telle qu'on ait $a_n \ni a_{n+1}$, ce qu'on peut écrire : $a \ni a \ni a ...$. Si $a \ni_n a$, avec $n > 0$, on aurait ce qui est appelé des *cycles d'appartenance*, qu'on peut schématiser par : $a \ni b_1 \ni ... \ni b_{n-1} \ni a \ni b_1 \ni ...$ C.Q.F.D. On a donc :

- $x \in_n x \Leftrightarrow n = 0$
- $x \in_\bullet y$ et $y \in_\bullet x \Rightarrow x \in_n y$ et $y \in_m x \Rightarrow x \in_{m+n} x \Rightarrow m+n = 0 \Rightarrow m = n = 0 \Rightarrow x = y$.

Corollaire 2

La relation $\in_\bullet$ est une relation d'ordre de domaine $\mathcal{U}$.

En effet, on a:

- $x \in_\bullet y \Rightarrow x \in_\bullet x$ et $y \in_\bullet y$
- $x \in_\bullet y$ et $y \in_\bullet x \Rightarrow x = y$
- $x \in_\bullet y$ et $y \in_\bullet z \Rightarrow x \in_\bullet z$

Le domaine est $\mathcal{U}$ car $\mathcal{U}$ est la collection $x \in_\bullet x$. Cependant, il est clair que $\in_\bullet$ n'est pas totale.
La relation de subappartenance stricte, savoir $x \in_\bullet y$ **et** $x \neq y$, est l'ordre strict associé à $\in_\bullet$. Elle est notée $\in_{\neq}$.

Comme toute collection X est une partie de $\mathcal{U}$, $\in_{\neq}$ induit un ordre sur X.

Corollaire 3

Toute branche d'appartenance est donc de la forme $b = (a_0 , ... , a_n)$. Les a_i sont distincts et ne peuvent être rangés que d'une *unique façon* pour constituer une branche.

Il est clair que les a_i sont distincts car s'il existait $j > i$ tel que $a_j = a_i = a$, on aurait $a \in_{j-i} a$, avec $j - i > 0$, ce qui est impossible.
S'il existait une autre rangement $b' = (a'_0 , ... , a'_n)$ des a_i , distinct du précédent, et tel que $a'_0 \ni a'_1 \ni ... \ni a'_n$, on peut alors considérer le premier entier i tel que $a_i \neq a'_i$. Pour $j < i$, on a donc $a_j = a'_j$. Comme a_i est distinct des a_j , donc des a'_j , et que $a_i \neq a'_i$, il s'en suit qu'il existe $k > i$ tel que $a_i = a'_k$. Comme $a'_i \in_{k-i} a'_k$, on a donc $a'_i \in_{k-i} a_i$. Un raisonnement analogue pour a'_i conduit à $a_i \in_{k'-i} a'_i$, d'où $a_i \in_m a_i$, avec $m = (k-i) + (k'-i) > 0$, ce qui est impossible. C.Q.F.D.

Remarques :

- Ce corollaire nous permet d'assimiler la suite $b = (a_0 , ... , a_n)$ avec l'ensemble $b' = \{a_0 , ... , a_n\}$, car à l'ensemble b' correspond la suite unique b telle que $a_0 \ni a_1 \ni ... \ni a_n$. Désormais le terme *branche* désignera l'ensemble b'. On étend la définition d'une branche au cas où $b' = \emptyset$. Elle correspond alors au 0-uplet, et on l'appelle la branche vide. Sa longueur est 0. La branche triviale $\emptyset$ n'est relative à aucun ensemble. Pour tout ensemble a, $\{a\}$ est une branche relative à a. En particulier $\{\emptyset\}$ est la seule branche relative à $\emptyset$.
- Soit une branche $b = \{a_0 , ... , a_n\}$, les a_i étant rangés par ordre de subappartenance dans a_0 croissant. a_0 et a_n sont appelés les *extrémités* de b. Toute partie non vide de b admet un maximum et un minimum pour la relation $\in_{\neq}$ dans a_0. Le maximum et le minimum de b sont donc respectivement a_0 et a_n .

Définition 2

Soient b et c deux branches d'appartenance. On dit que b est une *sous-branche* d'appartenance de c si $b \subset c$. On dit alors que c *prolonge* b ou est un *prolongement* de b. On dit que b est une sous-branche *stricte* de c ou que c est un prolongement *strict* de b si b est une partie stricte de c.

Si $b = \{a_0 , ... , a_n\}$ est une branche relative à a_0, il est évident que $b' = \{b, a_0 , ... , a_n\}$ est une branche relative à b.
b' est donc un prolongement de b. Il est clair aussi que pour tout ensemble non vide a, toute branche relative à a est de la forme $b = \{a\} \cup b'$ où b' est une branche relative à un élément de a.

Étant donné un ensemble A, la collection B des branches d'appartenance relatives à A est un ensemble puisqu'il est clair qu'une branche b est une partie de CL(A), donc $B \subset \mathcal{P}[CL(A)]$. B est appelée l'*arbre d'appartenance* relatif à A. Quant à la collection B' des branches de fondation relatives à A (appelée donc l'*arbre de fondation* relatif à A), elle est aussi un ensemble puisque c'est une partie de B.

- THÉORÈME 2

Pour tout ensemble x, toute branche d'appartenance relative à x est prolongée par une branche de fondation relative à x.

Démontrons-le en utilisant le principe d'hérédité. Cette assertion est vraie pour $\varnothing$ puisque $\{\varnothing\}$ est la seule branche de $\varnothing$ et cette branche est la branche de fondation relative à $\varnothing$. Soit un ensemble x. Supposons l'assertion vraie pour tout $y \in x$. Toute branche b relative à x est de la forme $b = \{x\} \cup b'$, où b' est une branche relative à un élément y de x. Il existe donc un prolongement b" de b' qui est une branche de fondation relative à y. Il est clair qu'alors $c = \{x\} \cup b''$ est une branche de fondation relative à x. C.Q.F.D.

Plus prosaïquement, ce théorème exprime que pour un ensemble a_0, si on prend un élément quelconque a_1 de a_0 , puis un élément a_2 de a_1 et ainsi de suite, cette ballade dans les entrailles de a_0 se termine en un nombre fini de coups toujours au fond d'une "voie sans issue", savoir l'ensemble vide, et ce quel que soit le chemin emprunté. Tout ensemble a croisé au passage l'est une seule fois.

On en déduit immédiatement le

<u>Corollaire</u>

$\varnothing$ appartient à toute collection transitive non vide A. En particulier, pour toute collection non vide X, $\varnothing \in Cl(X)$.

c. Démonstrations et définitions par hérédité (de fondation)

Le théorème de fondation autorise plusieurs principes dont le suivant, qui généralise le principe d'induction sur les collections ordinales :

- THÉORÈME 1 : **Principe d'hérédité.**

Étant données une collection ***transitive*** A *et une collection* P, *si* : $(\forall x \in A)\ (x \subset P \ \Rightarrow\ x \in P)$, *alors* $A \subset P$.

En d'autres termes, si pour tout $x \in A$, la véracité de la propriété exprimée par la collection P pour tous les éléments de x entraîne la véracité de P pour x , alors P est vraie pour tout $x \in A$.

<u>Démonstration :</u>

On suppose vrai : $(\forall x \in A)\ (x \subset P \ \Rightarrow\ x \in P)$. Montrons alors que $(\forall x \in A)\ (x \in P)$.

Supposons qu'il existe des élément x de A tels que $x \notin P$. Soit alors la collection B de tels éléments. B n'étant pas vide, on peut considérer un élément b de B de *rang minimal*. Si b est vide, alors $b \subset P$, donc $b \in P$, ce qui est contradictoire. Donc b est non vide. Puisque A est transitive, tout élément c de b appartient à A. Le rang de c étant strictement inférieur à celui de b, c ne peut appartenir à B ; donc $c \in P$, donc $b \subset P$, d'où $b \in P$, ce qui est également contradictoire. Donc B est vide. C.Q.F.D.

Le principe d'hérédité de fondation, ou simplement d'hérédité, a un intérêt particulier lorsque A est une collection universelle. Il est clair que si A est une collection ordinale, ce principe se confond alors avec le principe d'induction sur les collections ordinales.

- THÉORÈME 2 : **Principe de définition par hérédité.**

Soient A une collection transitive, W une collection , M est la collection des applications définies sur les éléments de A et à valeurs dans W; H est une application de M dans W. Alors il existe une application F de A dans W telle que pour tout $x \in A$, on ait : $F(x) = H(F|x)$. F est la seule application ayant cette propriété.

Démontrons ce théorème par étapes, suivant le même plan que pour le principe de définition par induction.

Étape 1

Soit B une partie transitive de A . S'il existe une application f de B dans W telle que pour tout $x \in B$, on ait : $f(x) = H(f|x)$, alors f est unique.

Soit g une application de B dans W telle que pour tout $x \in B$, $g(x) = H(g|x)$. Montrons par hérédité que $f = g$. Soit $x \in B$. Comme B est transitive, on a $x \subset B$. Supposons que pour tout $y \in x$, $f(y) = g(y)$. On a donc $f|x = g|x$, donc $H(f|x) = H(g|x)$, soit $f(x) = g(x)$. C.Q.F.D.

L'application f étant unique on la notera f_B . Nous dirons ici " f_B existe" pour signifier qu'il existe une application f de B dans W telle que pour tout $x \in B$, on ait : $f(x) = H(f|x)$.

Étape 2
Soit B une partie transitive de A. Si f_B existe, alors pour tout $x\in B$ de B, $f_{Cl(x)}$ existe et on a : $f_{Cl(x)} = f_B|Cl(x)$.
Réciproquement, si pour tout $x\in B$, $f_{Cl(x)}$ existe, alors f_B existe.

Soit $x\in B$. Pour $y\in Cl(x)$, on a $f_B(y) = [f_B|Cl(x)](y)$. Comme Cl(x) est transitive, on a $y \subset Cl(x)$, ce qui entraîne $f_B|y = [f_B|Cl(x)]|y$. D'autre part on a $f_B(y) = H(f_B|y)$, d'où $[f_B|Cl(x)](y) = H[[f_B|Cl(x)]|y]$. Donc $f_{Cl(x)}$ existe et on a $f_{Cl(x)} = f_B|Cl(x)$.

Réciproquement, supposons que pour tout $x\in B$ de B, $f_{Cl(x)}$ existe. Soit alors F l'application de B dans W définie par
$F(x) = H[f_{Cl(x)} |x]$, pour $x\in B$.

Soit $y\in x$. On a $F(y) = H[f_{Cl(y)} |y]$. Comme $y \in Cl(x)$, on a aussi $f_{Cl(x)} (y) = H[f_{Cl(x)}|y]$
Soit $z\in y$. On a $z \in Cl(x)$. Comme aussi $z \in Cl(y)$ et $Cl(y) \subset Cl(x)$, on a donc $f_{Cl(x)} (z) = [f_{Cl(x)}|Cl(y)](z)$.
Et comme $f_{Cl(x)}|Cl(y) = f_{Cl(y)}$, on a donc $f_{Cl(y)} (z) = f_{Cl(x)} (z)$, donc $f_{Cl(y)}|y = f_{Cl(x)}|y$, donc
$H[f_{Cl(y)} |y] = H[f_{Cl(x)} |y]$, c'est-à-dire $F(y) = f_{Cl(x)} (y)$, donc $F|x = f_{Cl(x)} |x$, d'où $F(x) = H(F|x)$, ce qui veut dire que $f_B = F$ existe. C.Q.F.D.

Étape 3
f_A existe.

D'après l'étape précédente, il suffit pour cela de montrer que pour tout $x\in A$, $f_{Cl(x)}$ existe, ce qu'on peut faire par hérédité. Supposons que pour tout $y\in x$, $f_{Cl(y)}$ existe. Soit $u \in Cl(x)$. Ou bien $u\in x$, dans ce cas $f_{Cl(u)}$ existe, ou bien
$u \in Cl(y)$, pour $y\in x$. Comme $f_{Cl(y)}$ existe , l'étape précédente assure qu'alors $f_{Cl(u)}$ existe. Donc pour tout $u \in Cl(x)$, $f_{Cl(u)}$ existe . Comme Cl(x) est transitif, l'étape précédente assure donc que $f_{Cl(x)}$ existe. C.Q.F.D.

Le théorème est ainsi démontré. Comme pour le principe de définition par induction, dans l'égalité $F(x) = H(F|x)$, l'application H est le *procédé* permettant de définir F(x) connaissant $F|x$, c'est-à-dire les valeurs de F pour les éléments de x. Ce théorème admet le corollaire un peu plus faible suivant :

Corollaire
Soient A *une collection transitive,* W *une collection ,* M' *est la collection des* ***images*** *des applications définies sur les éléments de* A *et à valeurs dans* W*;* H' *est une application de* M' *dans* W. *Alors il existe une application* F *de* A *dans* W *telle que pour tout* $x \in A$ *, on ait :* $F(x) = H'(F < x >)$. F *est la seule application ayant cette propriété.*

Il suffit d'appliquer le théorème avec H défini de M dans W tel que $H(\varphi) = H'(\mathrm{Im}\ \varphi)$. On a alors pour $x\in A$,
$F(x) = H(F|x) = H'[\mathrm{Im} (F|x)] = H'(F < x >)$. C.Q.F.D.

Considérons un exemple d'application de ce corollaire dans le paragraphe qui suit :

d. Ensembles a- fondés

Quel rapport y a-t-il entre les ensembles :

$u = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ et $v = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\}$?

Il y a visiblement quelque chose, mais quoi précisément ? On verrait peut-être plus clair en posant :
$a = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Il apparaît alors que $v = \{a, \{a\}\}$, et donc que v est construit à partir de a de la même manière que u est construit à partir de $\emptyset$. C'est cette "manière" que nous nous proposons de préciser ici.
En remarquant aussi que $u = 2 = \{0, 1\}$ et que $a = 3$, on a donc $v = \{3, \{3\}\}$. Les ensembles {v, 3, 0} ; {v, 3, 1, 0} ; {v, 3, 2, 0} ; {v, 3, 2, 1, 0} ; {v, {3}, 3, 0} ; {v, {3}, 3, 1, 0} ; {v, {3}, 3, 2, 0} ; {v, {3}, 3, 2, 1, 0} sont les 8 branches de fondation relatives à v, et 3 est un élément de toutes ces branches, d'où la

Définition

Soit un ensemble a. On dit d'un ensemble x qu'il est **a- fondé** si a appartient à toute branche de fondation relative à x.

Concrètement, cela veut dire qu'en se déplaçant dans les profondeurs de x, d'éléments en éléments, on croise toujours a quel que soit le parcours suivi, et ce en un nombre fini d'étapes. Puis le parcours se poursuit dans a jusqu'à l'ensemble vide.
Il est clair que tout ensemble x est x- fondé. Dans l'exemple précédent, v est l'ensemble 3- fondé *correspondant à* u. D'une manière générale, a étant un ensemble donné, définissons au moyen du principe d'hérédité, l'ensemble a- fondé f(x) correspondant à un ensemble x.

En appliquant le corollaire du paragraphe précédent, avec $A = W = \mathcal{U}$ et H' défini par :
$H'(\varnothing) = a$ et $H'(X) = X$ pour $X \in M' - \{\varnothing\}$, l'application $f = F$ est alors celle définit par :

$f(\varnothing) = a$ et $f(x) = f < x >$, pour un ensemble $x \neq \varnothing$.

Autrement dit, on a pour $x \neq \varnothing$, $f(x) = \{ f(y) \}_{y \in x}$.

On vérifie en particulier que:
$f(\{\varnothing\}) = \{ f(\varnothing) \} = \{a\}$ et
$f(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{ f(\varnothing) , f(\{\varnothing\}) \} = \{a, \{a\}\}$
etc.

Montrons, toujours à l'aide du principe d'hérédité, que tout ensemble vérifie la propriété $x \in P$ définie par :
$(\forall y \in x)\forall z [f(z) = f(y) \Rightarrow z = y]$.

Il est trivial que $\varnothing \in P$, puisqu'on a toujours $(\forall y \in \varnothing) \forall z [f(z) = f(y) \Rightarrow z = y]$
Soit un ensemble x. Supposons que pour tout $y \in x$, on a $y \in P$, autrement dit, $(\forall u \in y)\forall v [f(v) = f(u) \Rightarrow v = u]$. Montrons qu'alors on a $x \in P$, c'est-à-dire, $(\forall y \in x)\forall z [f(z) = f(y) \Rightarrow z = y]$

Soit $y \in x$ et soit un ensemble z. Supposons que $f(z) = f(y)$. On a alors, $\{ f(t) \}_{t \in z} = \{ f(u) \}_{u \in y}$.
Soit $t \in z$. On a $f(t) \in \{ f(u) \}_{u \in y}$, donc il existe $u \in y$ tel que $f(t) = f(u)$. D'après l'hypothèse, on a donc $t = u$,
donc $t \in y$, d'où $z \subset y$.
Et à cause de la symétrie de y et z dans ce raisonnement , on a donc aussi $y \subset z$, donc $z = y$. C.Q.F.D.

On en déduit immédiatement que f est une injection. En effet, dire que deux ensembles x et x' sont tels que : $f(x) = f(x')$ revient à dire que $(\forall y \in \{x\})[f(x') = f(y)]$. On a alors $x' = y$, donc $x' = x$.

f est donc une bijection de $\mathcal{U}$ sur Im f. Montrons pour finir que est un isomorphisme de $\mathcal{U}$ sur Im f. Il faut donc montrer que pour tous ensembles x et y , on a : $y \in x \Leftrightarrow f(y) \in f(x)$.

Il est clair que, par définition de f(x), on a : $y \in x \Rightarrow f(y) \in f(x)$.
Réciproquement, supposons $f(y) \in f(x)$. Par définition de f(x), il existe donc $y' \in x$ tel que $f(y) = f(y')$, d'où $y = y'$, donc $y \in x$. C.Q.F.D.

On en déduit que pour tout entier n : $y \in_n x \Leftrightarrow f(y) \in_n f(x)$.

f est notée $\mathbf{Fd_a}$. En particulier, on a $Fd_{\varnothing} = Id$.
x étant un ensemble, $\mathbf{Fd_a(x)}$ est appelé le **a- fondé de x** .
Bien entendu, cette notion n'aura un certain intérêt que dans la mesure où a sera un ensemble particulier comme par exemple un ordinal ou un univers.

e. α- univers engendré par un ensemble

Proposition 1
Pour tout univers U de transordinal θ, on a : $U \subset V_\theta$.

Démontrons-la à l'aide du principe d'hérédité. On a $\varnothing \in V_\theta$. Soit $x \in U$. Supposons $x \subset V_\theta$. Alors la proposition 2. 4 assure que $x \in V_\theta$, donc $U \subset V_\theta$. C.Q.F.D.

Corollaire
$V_\theta = U$.

Immédiat puisque $V_\theta \subset U$ et $U \subset V_\theta$.

Proposition 2
U étant un univers, tout modèle intérieur de U est égal à U.

En effet, soit $\theta = On(U)$. Soit U' un modèle intérieur de U. D'après l'axiome d'uniformité, U' est un univers, donc un sous-univers de U. Comme $\theta \subset U'$, il est clair que $\theta = On(U')$, donc $U = U' = V_\theta$.

Proposition 3
U et U' étant des collections universelles, on a : $U = U'$ ou $U \in U'$ ou $U' \in U$.

En effet soient θ et θ' les transordinaux respectifs de U et U'. Si $\theta = \theta'$, alors $V_\theta = V_{\theta'}$, donc $U = U'$.
Si $\theta \neq \theta'$, alors $\theta < \theta'$ ou $\theta' < \theta$, d'où il découle immédiatement $V_\theta \in V_{\theta'}$ ou $V_{\theta'} \in V_\theta$,
c'est-à-dire d'après la même proposition, $U \in U'$ ou $U' \in U$. C.Q.F.D.

Les univers U et U' étant transitifs, on a donc: $U \subset U'$ ou $U' \subset U$.

Cette proposition établit une certaine similitude entre les univers et les ordinaux, ce qui nous autorise à étendre les relations $\leq$ et $\geq$ aux univers. Par exemple, si un univers U est inclus (resp. strictement inclus) dans un univers U', on dira naturellement que U est *inférieur* (resp. strictement *inférieur*) à U' . On notera $U \leq U'$ (resp. $U < U'$).

Lemme 1
Toute collection non vide d'univers possède un minimum.

Démonstration :
Soit C une collection non vide d'univers, et soit $U \in C$. Si aucun autre élément de C n'appartient à U, alors U est un élément de tout autre élément de C, donc est le minimum de C cherché. Si tel n'est pas le cas, il existe donc un élément de C appartenant à U. On peut donc considérer l'ensemble (non vide) X des éléments de C appartenant à U. D'après le théorème de fondation, il existe un élément u de X n'ayant aucun élément commun avec X. Si v est un élément de X distinct de u, comme $v \notin u$, on a donc $u \in v$. Donc u est le minimum de X et par conséquent de C. C.Q.F.D.
On en déduit immédiatement le

Lemme 2
Toute collection d'univers est bien ordonnée par la relation $\in$.

Le plus petit univers U' supérieur à un univers U est appelé le **successeur** de U. U est donc alors le **prédécesseur** de U'.
Un univers distinct de l'univers minimum et qui n'est pas un successeur est dit *limite*.

Lemme 3
α étant un ordinal et X un ensemble, il existe un plus petit α- univers incluant X.

Il suffit d'appliquer le lemme 1 à la collection C des α- univers incluant X .

Définition 1
Si u est le plus petit α- univers incluant un ensemble X, on dit que u est le **α- univers engendré par X**, et on le note $\mathbf{E_\alpha(X)}$.

Si X est un singleton {x}, on dira que u est **amorcé** par x. $E_\alpha(\{x\})$ est alors noté $\mathbf{A_\alpha(x)}$. C'est donc le plus petit α- univers ayant x comme élément.

Remarque:

Cette définition implique immédiatement que tout univers U incluant un ensemble X inclut aussi $E_\alpha(X)$. On en déduit aussi que tout univers *contenant* X, *inclut* $A_\alpha(X)$.

Les résultats suivants sont évidents :

1. X étant un ensemble et α un ordinal,
   - $E_\alpha (X) \subset A_\alpha(X)$
   - $E_\alpha [E_\alpha(X)] = E_\alpha(X)$; plus généralement, U étant un α- univers, $E_\alpha(U) = U$.

2. X et Y étant deux ensembles,
   si $X \subset Y$, alors $E_\alpha(X) \subset E_\alpha(Y)$

3. X et Y étant deux ensembles,
   si $X \subset E_\alpha(Y)$ alors $E_\alpha(X) \subset E_\alpha(Y)$; on en déduit que:
   $E_\alpha(X) = E_\alpha(Y)$ si et seulement si $X \subset E_\alpha(Y)$ et $Y \subset E_\alpha(X)$

Proposition
Tout univers est engendré par son transordinal.

En effet, soit un univers U et $\theta = On(U)$. On a $V_\theta = U$. $E_0(\theta)$ est l'univers engendré par θ. $E_0(\theta)$ est donc un sous-univers de U. De plus, il est clair que son transordinal est également θ, ce qui implique que $V_\theta = E_0(\theta)$, d'où $E_0(\theta) = U$.

α- univers d'ordre β

Lemme 4
Soit un ordinal α. La collection des α- univers $Uv(\alpha)$ n'est pas un ensemble.

En effet, si tel était le cas, il y aurait un α- univers U tel que $Uv(\alpha) \in U$. U serait lui-même un élément de $Uv(\alpha)$, et comme $Uv(\alpha)$ est transitif, on aurait donc $U \subset Uv(\alpha)$, d'où $Uv(\alpha) \in Uv(\alpha)$, ce qui est impossible pour un univers.

- THÉORÈME

$Uv(\alpha)$ est isomorphe à *On*. L'isomorphisme est notée $\mathbf{M_\alpha}$.

C'est une conséquence immédiate du théorème II. 3. a. 1

Pour un ordinal β, $M_\alpha(\beta)$ est appelé α- univers d'ordre β. $On[M_\alpha(\beta)]$ est noté $\mathbf{\Omega_\alpha(\beta)}$.
$M_0 (\alpha)$ sera noté $\mathbf{U_\alpha}$ et appelé **univers d'ordre α**. $On(U_\alpha) = \Omega_0(\alpha)$ est noté $\mathbf{\Gamma_\alpha}$.

Si $\alpha > 0$, $M_\alpha(\beta)$ est appelé un **hyperunivers**.
Il est clair que la collection des hyperunivers n'est pas un ensemble. Elle est donc aussi isomorphe à *On* et l'isomorphisme est notée H.
H(α) , encore noté $\mathbf{H_\alpha}$, est appelé **hyperunivers d'ordre α**. $On(H_\alpha)$ est noté $\mathbf{\Omega_\alpha}$.

$\mathbf{U_0} = A_0(\emptyset) = M_0(0)$ est donc le plus petit univers.

$\mathbf{H_0} = A_1(\emptyset) = M_1(0)$ est le plus petit hyperunivers.

f. Collections ordinoïdes

Lemme
Toute collection non vide X admet un élément minimal pour la relation $\in$ (resp. pour la relation $\in_{\neq}$) dans X. Autrement dit, il y a dans X un élément m (non nécessairement unique) n'ayant aucun élément (resp. aucun subélément strict) dans X.

En effet, soit m un élément de X de rang minimal. m ne peut avoir dans X un élément (resp. un subélément strict), autrement ce dernier aurait un rang strictement inférieur à celui de m, ce qui est contradictoire. C.Q.F.D.

Définition

On dit d'une collection X qu'elle est une **collection ordinoïde** si la relation $\in_{\neq}$ est totale dans X. Si X est un ensemble, alors on dit que x est un **ordinoïde**.

Exemples :
- Toute branche d'appartenance est un ordinoïde fini.
- Toute collection d'ordinaux est une collection ordinoïde ainsi que toute collection d'univers.

- THÉORÈME

Toute collection ordinoïde X est bien ordonnée par la relation $\in_{\neq}$.

Soit Y une partie non vide de X. Le lemme précédent assure que Y a un élément minimal x pour $\in_{\neq}$. Supposons que Y a un élément minimal y distinct de x. Comme $\in_{\neq}$ est totale dans X, on a soit $x \in_{\neq} y$, soit $y \in_{\neq} x$. Dans les deux cas, cela contredit le fait que x et y sont des éléments minimaux. C.Q.F.D.

3. Ensembles héréditairement finis

a. Définition

On dira d'un ensemble x qu'il est **héréditairement fini** si tout subélément de x est fini.

Ce qui équivaut à dire que x est fini et tout élément de Cl(x) est fini, ou encore que tout élément de CL(x) est fini.

Lemme 1

Si x est un ensemble *héréditairement fini,* alors tout subélément (donc en particulier tout élément) de x est héréditairement fini.

A cause de la transitivité de $\in$.

Lemme 2

Pour qu'un ensemble x soit héréditairement fini, il faut et il suffit que x soit fini et que tout élément de x soit héréditairement fini.

Il est clair que si x est héréditairement fini, alors x est fini et ses éléments sont héréditairement finis (lemme 1). Réciproquement, supposons x fini et ses éléments héréditairement finis. Soit y un subélément strict de x. Alors y est un subélément d'un élément z de x. Comme z est supposé héréditairement fini, il s'en suit que y est fini. En définitive, x et tous ses subéléments stricts sont finis, donc x est héréditairement fini. C.Q.F.D.

b. Univers des ensembles héréditairement finis V_ω

Montrons que U_0 est l'univers des ensemble héréditairement finis et que $U_0 = V_\omega$.

Soit U la collection des ensemble héréditairement finis. Montrons que U est universelle.
- $\varnothing \in U$, bien évidemment.
- U est transitive (lemme 1)
- Si x est un ensemble héréditairement fini, $\mathcal{P}(x)$ est héréditairement fini. En effet, x étant fini, toute partie y de x est un ensemble fini d'ensembles héréditairement finis, donc est héréditairement fini, donc, en vertu du lemme 2, y est héréditairement fini. $\mathcal{P}(x)$ est aussi un ensemble fini d'ensembles héréditairement finis, donc est héréditairement fini.
- Si x est héréditairement fini, les éléments de x sont finis, donc réu(x) est une réunion finie d'ensembles finis donc est fini. Et comme tout élément de réu(x) est évidemment héréditairement fini, réu(x) l'est donc aussi.
- Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles héréditairement finis indexée par un ensemble héréditairement fini I, l'ensemble $\{x_i\}_{i\in I}$ est un ensemble fini d'ensembles héréditairement finis, donc est héréditairement fini.

U est donc une collection universelle. Les ordinaux de *On*(U) sont finis , donc $\omega \notin$ *On*(U). Donc $U \neq \mathfrak{U}$, et par conséquent d'après l'axiome d'uniformité, U est un univers. De ce fait, on a $\omega \subset$ *On*(U), ce qui a pour conséquence immédiate que *On*(U) = ω, et par conséquent que $U = V_\omega$. Tout univers inférieur à U a forcément ω comme transordinal, donc est un modèle intérieur de U, donc est égal à U. U n'est donc nul autre que le plus petit univers noté U_0. C.Q.F.D.

- THÉORÈME

Pour qu'un ensemble x soit héréditairement fini, il faut et il suffit que Cl(x) soit fini

Si Cl(x) est fini, il est clair que x est héréditairement fini. En effet, pour tout subélément y de x, on a $y \subset Cl(x)$ donc y est fini, donc x est héréditairement fini. Réciproquement, montrons à l'aide du principe d'hérédité que si x est héréditairement fini, alors Cl(x) est fini. $Cl(\varnothing)$ est fini. Soit un ensemble héréditairement fini x. Supposons que Cl(y) est fini pour tout $y \in x$. On a $Cl(x) = x \cup$ réu (Cl < x >) $= x \cup$ réu [$\{Cl(y)\}_{y\in x}$] . L'ensemble $\{Cl(y)\}_{y\in x}$ est fini et l'ensemble réu [$\{Cl(y)\}_{y\in x}$] est une réunion finie d'ensembles finis donc est fini, et par conséquent aussi
$Cl(x) = x \cup$ réu [$\{Cl(y)\}_{y\in x}$]. C.Q.F.D.
On en déduit immédiatement le

Corollaire

Pour tout ensemble x , Cl(x) est infini si et seulement si x est infini ou si un subélément strict de x est infini.

- THÉORÈME

Tout ensemble héréditairement fini x est obtenu au moyen de l'une des trois règles suivantes :
- $x = \varnothing$
- $x = \{a\}$, où a est un ensemble héréditairement fini.
- $x = a \cup b$, où a et b sont des ensembles héréditairement finis.

Démontrons ce théorème au moyen du principe d'hérédité. Désignons par P la collection des ensembles obtenus par ces règles. On a $\varnothing \in P$. Soit un ensemble héréditairement fini $x = \{a_1 , a_2 , ... , a_n\}$. Supposons que $a_i \in P$. La seconde règle implique donc que $\{a_1\}, \{a_2\}, ... ,\{a_n\}$ sont des éléments de P. x est alors obtenu en appliquant $n - 1$ fois la troisième règle avec les $\{a_i\}$. C.Q.F.D.

Remarque :

On rappelle qu'un couple (x, y) est l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Il est donc clair que si x et y sont des ensembles héréditairement finis, alors (x, y) l'est également. Il en est de même pour ou une suite fini d'ensembles héréditairement finis. Une telle suite est en toute rigueur un ensemble fini de couples héréditairement finis, donc est un ensemble héréditairement fini.

c. Isomorphisme de U_0 sur ω

Établissons un isomorphisme de U_0 sur ω.

Lemme

Toute partie infinie de ω est équipotente à ω.

Soit A une partie infinie de ω et soit τ le type d'ordre de A. D'après le corollaire du théorème 3. c. 3 , $\tau \leq \omega$.
Si $\tau < \omega$, alors A serait isomorphe donc équipotent à un ordinal fini, ce qui contredirait le fait que A est infini.
Donc $\tau = \omega$. C.Q.F.D.

Nous avons établi que ω est un sous-ensemble de U_0. Montrons, par le biais d'un isomorphisme, que U_0 se "cache" lui-même dans les entrailles de ω, autrement dit que l'*arithmétique* recèle, sous une forme déguisée, une théorie des ensembles.

Intéressons-nous aux suites (finies) binaires, c'est-à-dire qui ne prennent que les valeurs 0 et 1. Une telle suite $(s_0 ,s_1 , ... , s_n)$ sera ici simplement notée $s_0\ s_1\ ...\ s_n$. De plus pour des raisons de "visualisation" de la démonstration, l'ordinal, ou chiffre, 0 sera ici noté "(" et 1 sera noté ")". On munit l'ensemble, noté ici S_b , des suites binaires de la relation de bon ordre définie en II. 3. b. iv. 2 .

Utilisons le principe d'hérédité pour associer à chaque ensemble héréditairement fini une suite binaire qui lui soit propre. On se propose donc de définir une injection f de U_0 dans S_b. Si x est un ensemble héréditairement fini, la suite binaire f(x) sera simplement noté x'.
On pose $f(\varnothing) = 01$, soit ( ) , autrement dit, $f(\varnothing) = \varnothing'$ est la suite binaire s de longueur 2 définie par : $s_0 = 0$ et $s_1 = 1$.

Soit un ensemble héréditairement fini $x = \{a_1 , a_2 , ... , a_n\}$, où les a_i sont distincts. On suppose f définie pour les éléments de x et donc que l'on a : $f(a_i) = a'_i$. On suppose également que a_i est le *seul* ensemble héréditairement

fini à avoir a'_i pour image. On définit alors $f(x) = x' = 0a'_1 1\, 0a'_2 1 \ldots 0a'_n 1$, soit $(a'_1)(a'_2) \ldots (a'_n)$, les a'_i étant rangés par ordre croissant, suivant le bon ordre dans S_b .
D'après le principe d'hérédité, f est donc définie pour tout ensemble héréditairement fini x.

On peut remarquer que si on représente l'occurrence "10" soit ")(" par la virgule "," on a $x' = (a'_1 , a'_2 , \ldots , a'_n)$ et la similitude *formelle* entre x et x' est évidente, ce qui justifie les conventions précédentes.
Ainsi par exemple l'image de l'ensemble $\{\varnothing\}$ sera $0011 = (( )) = (\varnothing')$
Celle de l'ensemble $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ sera $0011000111 = (( ) , (( ))) = (\varnothing', (\varnothing'))$.

Il est clair aussi que la suite $(a'_1)(a'_2) \ldots (a'_n)$ fait apparaître n paires de nouvelles parenthèses qui seront dites de niveau 0 pour x'. Il est évident aussi qu'à chaque parenthèse de niveau 0 dans x' correspond une parenthèse opposée et une seule de niveau 0 dans x', les deux parenthèses encadrant l'image d'un élément de x. Les parenthèses de niveau 0 des a'_i sont de niveau 1 pour x'. Les suites a'_i sont appelés, par analogie avec x, les "éléments" de x' ; on écrit $a'_i \in' x'$. On voit que les parenthèses de niveau 0 des éléments des a'_i sont de niveau 2 pour x' etc.

Montrons que x est le seul ensemble à avoir x' comme image. En effet, soit un ensemble héréditairement fini $y = \{b_1 ,b_2 , \ldots , b_m\}$ dont l'image est $y' = (b'_1)(b'_2) \ldots (b'_m)$. Supposons que $x' = y'$. On a donc m paires de parenthèses de niveau 0 dans y', ce qui conduit à $m = n$, donc $b'_i = a'_i$. Puisque a'_i est propre à a_i , on a donc $b_i = a_i$, d'où $x = y$. f est donc injective.

Soit U'_0 l'ensemble des images des éléments de U_0. f est donc une bijection de U_0 sur U'_0. On a pour tous x et y de U_0 , $x \in y \Leftrightarrow x' \in' y'$. f est donc un isomorphisme U_0 sur U'_0. U'_0 est une partie infinie de $\sigma(\omega)$, donc est isomorphe à ω, puisque $\sigma(\omega)$ l'est. Donc U_0 est isomorphe à ω. Cet isomorphisme est noté K. C.Q.F.D.

Fin de ce que j'appelle la Théorie des Univers proprement dite.
La théorie dont les balbutiements remontent à la fin des années 1980 et début 1990,
a véritablement démarré en 1997 et a très vite mûri en un an,
l'essentiel ayant été « pondu » avant fin 1998.
Tout ce qui a été fait entre 1998 et 2003 n'était qu'un « dépoussiérage » épisodique de la théorie,
une réorganisation de telle ou telle partie,
une retouche de telle ou telle démonstration, un affinage de tel ou tel concept.
Je sentais que cette théorie (je rappelle qu'à l'époque elle était purement mathématique
et que la notion d' « univers » voulait seulement dire « univers d'ensembles »)
disait quelque chose sur l'Univers physique, le physicien que je suis fondamentalement le sentait.
Ce sont mes recherches en physique qui m'ont amené dans les problèmes
des fondements des mathématiques,
qui ont fini par m'absorber et faire de moi un « matheux » loin de la physique
ou en tout cas qui ne projetait plus de reprendre des recherches en physique,
la théorie mathématique des univers étant suffisamment féconde pour occuper ma matière grise...
Mais à force de parler des « univers » et de comprendre les objets mathématiques que je nommais ainsi,
j'acquerrais une simple conviction : ces objets veulent dire quelque chose sur l'Univers physique,
ils ont quelque part une application en physique, mais laquelle ?
La Théorie des Univers fut laissée en jachère pendant environ trois ans
comme du vin qu'on laisse vieillir en cave pour qu'il devienne meilleur…
Je me suis remis en gratouiller épisodiquement des notes de recherche en physique,
j'ai repris les réflexions sur la relativité et la mécanique quantique laissées de côté depuis longtemps,
mais je ne trouvais rien de fondamentalement nouveau,
car en fait j'avais trouvé ce qu'il fallait trouver mais sans le savoir, sans comprendre vraiment son sens.
Jusqu'en 2003, quand la lumière est venue…
La suite dans la partie B et surtout C…

B - Mutation de 2003, vers la Théorie universelle des ensembles

La notion de schème et de modèle universel

Après la Théorie des Univers, si je dois donner un nom à la présente partie, c'est la « **Théorie du Schème** ». Le **schème** est un concept simple m'est « tombé du ciel » en août 2003 et qui me faisait comprendre encore plus profondément la nature, la structure, la logique et le langage des ensembles, le vrai sens de ce que dans les paradigmes traditionnels on appelle les « axiomes » de la théorie des ensembles.

Je me suis aperçu qu'il suffit de munir n'importe quelle collection U d'objets de n'importe quelle relation R pour que le couple (U, R), appelé un **schème**, vérifie d'office certains axiomes de base de la théorie des ensembles. Cela signifie que ces axiomes ne sont pas de vrais axiomes mais des **théorèmes naturels**, les théorèmes de ce que j'appelle le **modèle universel**, c'est-à-dire donc un **modèle universel des ensembles**, une théorie minimale des ensembles qui n'a plus besoin d'axiomes. Les premiers pas de la mutation de la Théorie des Univers (une théorie axiomatique, rappelons-le) vers la Théorie universelle des ensembles ou Science de l'Univers TOTAL et sa méthodologie qui est la **Théorématique** sont ainsi faits.

C'est le **schème** et ses propriétés profondes qui permettent de comprendre ce que doit être à la base un universel d'ensembles, quelles sont en quelque sorte les « axiomes gratuits » et « naturels » qu'il nous offre et qui nous dispensent de « payer le prix » de les introduire artificiellement.

Car il faut dire que ce n'est pas une mince affaire d'introduire un axiome, surtout s'il y a d'autres axiomes déjà introduits avant lui. Il faut alors s'assurer qu'il ne contredit pas les autres ou au moins l'un d'entre eux, qu'il rentre dans le groupe des axiomes déjà installés sans semer le bazar (autrement dit sans causer des paradoxes). Il faut se lancer, comme on le fait actuellement, dans des considérations de consistance de la théorie, qui peuvent un vrai casse-tête. Certains axiomes de la théorie des ensembles (comme par exemple l'hypothèse du continu émise par Cantor le père de la théorie des ensembles) ont nécessité de longues années de recherches des spécialistes avant de prouver qu'ils ne causent pas de paradoxes dans la théorie obtenue en les ajoutant. Et bien souvent, on doit se contenter de la démonstration de constance relative, ce qui veut dire que l'on ne démontre pas que la nouvelle théorie n'est pas contradictoire, mais simplement que si la théorie d'avant n'était pas déjà contradictoire, alors le nouveau venu parmi les axiomes ne la rend pas contradictoire. On est au moins à moitié rassuré, car il ne reste qu'à s'assurer que la théorie d'avant n'était pas contradictoire, ce qui est plus facile à dire qu'à faire !

Mais comme on le comprendra dans la partie C avec la **Théorématique**, toutes ces complications et tous ces affres sont dus à seul coupable, à un seul champignon toxique dans la corbeille de la science et du monde : la **Négation** ! Pendant la brève période de l'étude du schème qui n'a duré que deux mois et même moins (août à septembre 2003) la **Négation** n'était pas encore identifiée comme le **Problème**. Quand elle le sera en septembre 2003, l'étude du **schème** (qui a justement été utile pour démasquer enfin le Diable…) s'arrêtera net. Et alors commencera la Théorie universelle des ensembles que nous présenterons dans la prochaine partie (la partie C).

Le **schème** aura enfin livré les plus profonds secrets des ensembles, il aura permis de comprendre que les ensembles n'ont en fait pas besoin d'axiomes pour être étudiés, et qu'en fait c'est la **Négation** qui rendait nécessaire le recours aux axiomes. C'est elle qui engendrait les paradoxes, qui transformait non seulement les sciences mais le monde en un champ de mines où il faut attention où l'on pose les pieds, au risque de sauter sur une mine.

Vers la fin des années 1980 et le début des années 1990,à l'époque mes recherches et mes réflexions, se concentraient essentiellement sur la physique (la relativité, la physique quantique, la physique des particules). J'ai été conduit vers les problèmes des fondements des mathématiques, dont la physique est une très grande consommatrice. C'est ainsi que j'en suis venu à me frotter avec les paradoxes de la théorie des ensembles. Si la Théorie des Univers est l'ancêtre de la Théorie universelle des ensembles, la Théorie des Univers a lui aussi un ancêtre, qui est l'étude des parenthésages dont il a été question dans à la fin de la Théorie des Univers (partie A) et par lesquels débute l'étude du **schème**.

.

On constate une simple chose : ces parenthésages vérifient naturellement tous les axiomes de la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo Fraenkel (abrégé ZF) plus l'axiome du choix (le système d'axiomes est alors appelé ZFC) et plus l'axiome de fondation (système appelé alors ZFC + AF). Seul un seul axiome n'est pas vérifié par les parenthésages : l'**axiome de l'infini**. C'est ce dernier point qui restait à régler, le dernier secret que le **schème** devait livrer, et alors la page de la **théorie axiomatique des ensembles** serait tournée, les portes de la **théorie théorématique des ensembles** (la théorie des ensembles **sans axiomes** et où tout est d'office un **théorème** !) seraient grande ouvertes.

En attendant, le **schème des parenthésages** a déjà fait faire un énorme pas dans cette direction. Cela veut dire simplement que si l'on veut faire une théorie des ensembles qui vérifie les axiomes de **ZFC + l'axiome de fondation** et sauf l'**axiome de l'infini**, on n'a aucun prix à payer, ces axiomes sont **gratuitement livrés par l'Univers**, ce qui veut dire que ce sont en fait des **théorèmes de l'Univers**, des **théorèmes universels**. C'est pour cela que j'ai appelé ce système d'axiomes (donc les théorèmes du **schème des parenthésages**) un **modèle universel** ou encore un **modèle central**, car c'est le noyau de toute bonne théorie des ensembles qui se respecte. Toute théorie des ensembles doit juste éventuellement ajouter son axiome propre à ce noyau de théorèmes (comme l'**Axiome des univers** dans mon cas), et doit juste s'assurer que son axiome ne contredit aucun de ses théorèmes, sinon sa théorie est fausse même si elle est cohérente ! Si un théoricien des ensembles ressent le besoin d'enlever l'un de ces **théorèmes universels** pour pouvoir introduire un certain axiome, parce que celui-ci est incompatible avec le théorème qu'il doit enlever, alors de ce fait ce dont il parle n'est plus vraiment des **ensembles**.

C'est comme si un arithméticien fait une théorie des nombres entiers naturels dans laquelle l'égalité :
2 + 2 = 4 n'est plus vérifiée ! Il peut ajouter une nouvelle égalité, par exemple **2 + 2 = 5**, et à lui de se débrouiller pour que **2 + 2 = 4** et **2 + 2 = 5** cohabitent pacifiquement sans que **2 + 2 = 4** ne soit obligé de rendre l'âme, et c'est possible (nous le verrons dans la partie C avec la Théorie universelle des ensembles) ! Mais si dans sa théorie présentée une théorie des entiers naturels l'égalité **2 + 2 = 4** n'est plus vraie, alors c'est qu'il ne parle plus vraiment des entiers naturels, mais d'autres choses. Le **schème des parenthésages** nous indique les propriétés les plus fondamentales et les plus universelles des ensembles, qui sont aussi les propriétés fondamentales des nombres entiers naturels, puisque c'est au cœur même des nombres entiers que ce schème est exhibé.

C'est parce que les **parenthésages** sont des assemblages finis qu'ils ne vérifient pas l'**axiome de l'infini**. L'un des très importants enseignements des parenthésages, c'est qu'ils disent ce que **SONT physiquement** les **ensembles**, ce qu'**être un ensemble**. Ils montrent qu'un **ensemble**, fini ou infini, est un **assemblage physique**, ils montrent la logique de cet assemblage. En notant « **0** » la parenthèse ouvrante ou « **{** » et « **1** » la parenthèse fermante « **}**» (habituellement je fais le choix inverse, mais peu importe, la logique est la même), les ensembles sont nombres codés en binaire, donc des objets numériques, des objets informatiques.
i) l'assemblage **{ }** ou **01** est l'**ensemble vide**, noté ∅ ou **0**.
ii) **a** étant un **ensemble**, **{a}** ou **0a1** est un **ensemble**, un singleton, dont l'**élément** est **a**.
iii) **a** et **b** étant deux **ensembles**, l'assemblage ou la concaténation **ab** est un nouvel **ensemble**.
iv) **tous les ensembles** sont obtenus par application répétée des règles d'assemblage précédentes.

Ainsi, mis à part l'ensemble vide et tout ensemble obtenu avec la règle iii) en concaténant avec l'ensemble vide, tous les ensembles sont de la forme : **{a_1}{a_2}{a_3}…{a_n}**.
Et en appelant virgule l'assemblage «**}{**» et en le notant «**,**», on voit bien que tout ensemble est de la forme : **{a_1, a_2, a_3, … ,a_n}**.

Très simple et très étonnant ! Jusque là, dans la connaissance que j'avais des ensembles et tels qu'on me les avait enseigné depuis que je faisais des mathématiques et utilisais le langage des ensembles, ce que je viens d'écrire était juste une simple notation d'un ensemble de **n éléments**. Mais là, avec le **schème des parenthésages**, il y avait quelque chose de nouveau et de grande importance : cette écriture n'est pas une simple notation des ensembles, mais dans cette écriture, jusqu'à la **virgule**, me dit ce qu'**EST un ensemble**, je ne vois pas la notation d'un **ensemble**, mais je vois simplement un **ensemble** ! Je peux maintenant dire qu'un ensemble n'est pas quelque chose d'abstrait, taillé par des axiomes, mais quelque chose de physique que je construis ! Et les propriétés de ces assemblages physiques, ce ne sont plus des axiomes, mais ce sont les **théorèmes des ensembles** ! En effet, pour démontrer ces théorèmes, il n'a pas été nécessaire d'introduire le moindre axiome mais de construire concrètement des objets, des assemblages, avec des règles très simples, et de dire que tous les objets que je peux construire ainsi sont appelés les **ensembles**. Le **schème des parenthésages** est le **modèle naturel des ensembles**, aussi **naturel** que le sont les **entiers naturels** desquels il est exhibé. C'est le **modèle fondamental** et **universel**, aussi **fondamental** et **universel** que le sont les **entiers naturels**.

Tous ces **ensembles** sont finis, ils n'obéissent pas à **l'axiome de l'infini**… et encore seulement apparemment ! Car encore faut-il être sûr de bien concevoir la notion d'**infini** que réclament les **ensembles**, pas une notion chimérique (une des ces notions que la **Négation** nous fait concevoir) qui cachent de vicieux paradoxes, difficiles à détecter parce qu'on travaille dans l'**abstraction** (on est en **déconnexion** avec la **Réalité qu'est l'Univers TOTAL**) et non pas dans le **concret** comme avec le **schème des parenthésages**.

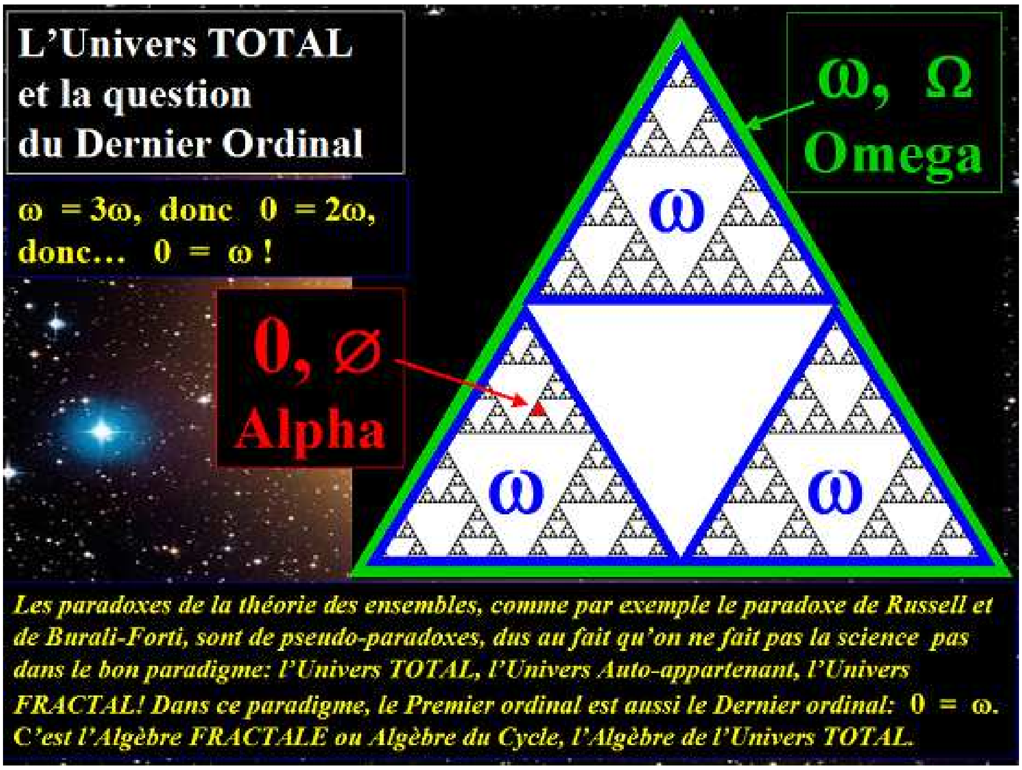
En tout cas, quand on a ça devant les yeux, il est difficile de ne pas se dire que les **ensembles infinis** poursuivent simplement la logique commencée si merveilleusement par ces **ensembles finis**. J'ai acquis la conviction qu'il doit exister un moyen de faire de l'**axiome de l'infini** lui aussi un théorème. Ou plus exactement un axiome qui s'inscrit dans la continuité de ce qu'enseigne le **schème des parenthésages**, et duquel l'axiome de l'infini ne serait qu'un simple théorème. Et il est même possible qu'une fois trouvé, cet axiome n'en soit qu'un en apparence, car pourquoi les autres seraient des théorèmes naturels et pas lui ? Et l'Axiome en question est simplement… l'**Axiome des univers**, l'axiome clef de la **Théorie des univers** présentée dans la partie **A**. La tentative avec l'étude du schème est simplement de trouver un moyens de transformer cet **axiome** en **théorème**. Mais en fait, il était déjà un théorème, mais c'est la **Négation** qui empêchait de s'en rendre compte… Quand cette **Vipère** qui envenime nos psychés, notre logique et par voie de conséquences les sciences aura été enfin démasquée (ce qui n'allait pas tarder avec le schème), le page des axiomes sera tournée.

Voici l'un des précieux enseignements que montrent le **schème des parenthésages**: l'**ensemble vide** est le premier **univers**. L'**univers** suivant, l'**univers** au-dessus de lui, est tout simplement l'**ensemble** de ces **ensembles finis**, le mot **ensemble** étant à prendre au sens le plus **naturel**, **universel** ! Inutile de jouer désormais avec les mots « **ensemble** », « **collection** », « **classe** » ou autre, inutile de séparer les **porcs** et les **cochons**, comme la **Négation** nous oblige à le faire, sous peine de nous infliger une morsure remplie de venin, ce qu'elle nous fait appeler les « paradoxes », alors que c'est elle le vrai **Paradoxe** ! Désormais, on ne parle que d'une seule notion d'ensemble, on s'achemine avec le **schème** doucement vers la **notion universelle d'ensemble**.

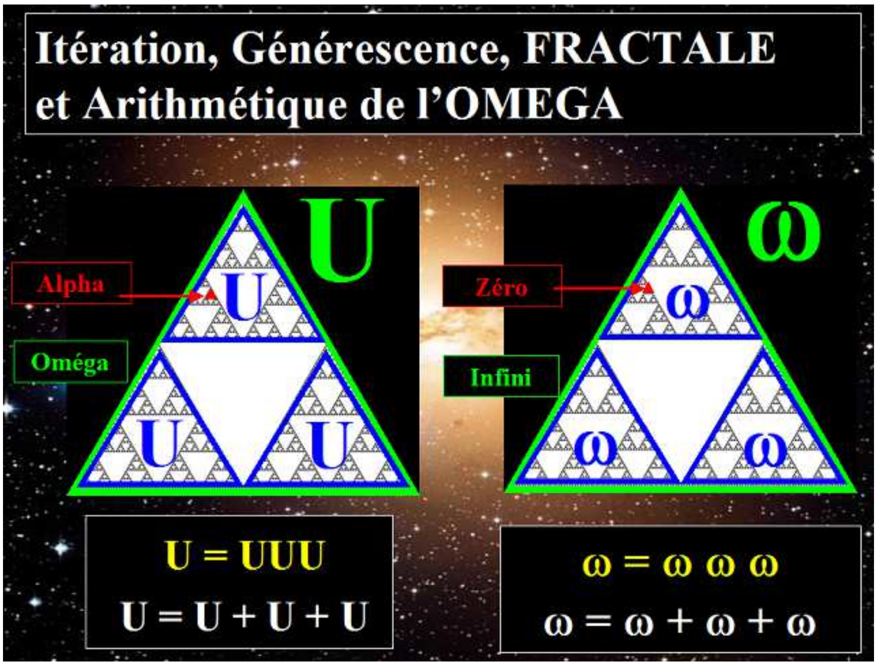
La notion d'**univers** étant définie avec un très grand soin depuis que les parenthésages étaient connus (c''est-à-dire depuis le début des années 1990) et affinée avec les enseignements du schème, il apparaît clairement que l'**ensemble vide** est le premier **univers**. Et l'**Axiome des univers** dit simplement : « *Tout ensemble appartient à un univers* ». Le plus petit **univers** ayant un ensemble E donné comme élément est l'univers engendré par E.

Et le plus petit **univers** ayant l'**ensemble vide** comme élément est justement l'**univers** des **ensembles finis**, connu par les théoriciens des ensembles sous le nom d'**ensembles héréditairement finis**. C'est l'ensemble $\mathbf{V_\omega}$ que j'ai aussi appelé $\mathbf{U_0}$ et que j'ai étudié en relation avec les parenthésages à la fin de la Théorie des univers (partie A). La puissance de cet univers, c'est-à-dire son cardinal (le nombre de ses éléments), est le **premier ordinal infini**, actuellement noté ω (ou **Oméga**) en tant qu'ordinal mais il est appelé $\aleph_0$ (ou **Alpha Zéro**) en tant que **premier cardinal infini**. Très simplement, ω est l'ensemble des entiers naturels : $\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Cet ordinal et cardinal (j'expliquerai la question des ordinaux et des cardinaux plus loin) est actuellement appelé le cardinal **infini dénombrable**, une appellation assez curieuse qui ne veut pas dire qu'on peut « dénombrer » tous ses éléments au sens habituel du terme « dénombrer » ou « compter », mais qu'on peut le « dénombrer » par un procédé de récurrence. Dans tels raisonnements, il suffit par exemple de prouver qu'une propriété est vraie pour **0**, et que, sa véracité pour un entier **n** quelconque implique sa véracité pour l'entier suivant **n+1**, pour avoir prouvé que cette propriété est vraie pour tous les éléments de ω. C'est comme si on fini de le compter, quoi. Mais bon, on aurait pu appeler différemment ce **premier infini**, qui est en fait aussi le **dernier** d'ailleurs, comme on ne l'a jamais compris et comme nous allons enfin le comprendre maintenant.

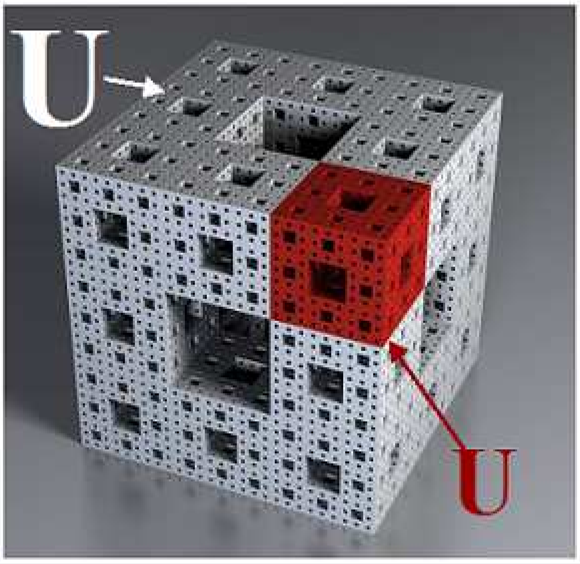
On aurait pu appeler ω simplement l'**Oméga** ou à la rigueur l'**infini canonique**. Tenez, comme on l'appelle déjà **Oméga**, à la place de cette appellation ambigüe d'«**infini dénombrable** » (que j'emploierai juste pour me faire comprendre par ceux qui le connaissent sous ce nom) on va donc l'appeler de manière plus appropriée : l'**Infini Canonique** ! Car c'est ce qu'il est en fait. Il est l'**Infini** de base, qui non seulement permet de construire les autres **Infinis**, mais surtout, quel que soit l'**Infini** construit avec ω, quel que soit l'Infini dont on parle en théorie des ensembles, on ne parle en fait que d'UN seul Infini fondamental, qui est le **premier ordinal** et le **dernier ordinal**, l'**Alpha** et l'**Oméga**. On ignorait simplement (ou on ne voulait pas savoir…) que l'**Univers des ensembles** a une **structure FRACTALE**, c'est la structure des **univers**, la structure des **ordinaux** (parce qu'on parle en fait des mêmes choses), la structure des **cardinaux**, bref la structure des **ensembles**.



__Structure Fractale__ des __ordinaux__ illustrée ici par un Triangle (Fractale) de Sierpinski.
Il faut trois fractales de Sierpinski pour en faire une,
je dis pour cela que le __générande__ de cette fractale est __3__.
Cela veut dire que cette fractale illustre la propriété suivante de l'ordinal ω:
$\omega = 3\omega$, *de laquelle on déduit :* $0 = \omega$.
D'une manière générale, une fractale de __générande n__
(ce qui veut dire qu'il __n petits modèles__ pour générer le grand modèle immédiatement supérieur)
exprime l'équivalence : $\omega = n\omega$, *qui revient toujours à dire :* $0 = \omega$,
équivalence appelée le __Cycle__ ω ou __Cycle Oméga__,
ou encore la __Loi de l'Alpha et de l'Oméga__,
la Loi fondamentale de l'__Univers TOTAL__ (l'__Univers des ensembles__),
qui est simplement la loi de sa __Structure FRACTALE__.
Cette structure montre clairement qu'on a un seul Infini de base,
l'__Infini Canonique__, qui est __Oméga__, ω.
Il est plus grand que lui-même, plus petit que lui-même, il est l'__Unique__.
Ce que l'on appelle l'__Ensemble Vide__ (∅) ou le __Zéro__ (__0__) et que j'appelle aussi l'__Alpha__,
n'est autre que le seul et même __Oméga__ !
L'__Ensemble Vide__ est aussi l'__Ensemble Plein__,
le __premier ordinal__ et le __dernier ordinal__, le seule et même __Univers des ensembles__.
C'est parce que cette logique des ensembles, la structure Fractale
a échappé parce qu'on fonctionnait avec la __Négation__
qu'on a parlé de « paradoxe » de Burali-Forti ou « paradoxe du dernier ordinal ».
alors que le vrai paradoxe est à imputer à la __Négation__.



*Quel que soit l'**ordinal** construit à partir de ω,*
*par exemple ici **ω + ω + ω** ou **3ω** , qui est donc plus grand que ω,*
on parle toujours finalement du seul et même ω.
Et (cela revient au même) quelque soit l'univers construit
*à partir de l'univers infini de base **U**, que j'appelais U_0 mais maintenant U_1*
*(car en fait c'est l'**univers vide**, l'**Alpha** qui mérite le numéro **0**),*
si grand et si gigantesque soit cet univers donc,
on parle du seul et même Univers des ensembles,
*qui est à la fois l'**Ensemble Vide** et l'**Ensemble Plein**,*
*qui est tout univers particulier dont on puisse parler, car il a une structure **FRACTALE**.*
*Cela signifie donc aussi que le terme « **Infini dénombrable** » qu'on emploie*
pour désigner le cardinal de l'ensemble des ordinaux finis (ou entiers naturels),
avec surtout l'idée qu'il N'EST QUE le plus petit des ordinaux infinis
est inexact pour ne pas dire simplement faux.
*Car il est aussi équivalent à **0** donc est **FINI**,*
et aussi il est plus grand que tous les ordinaux et les cardinaux,
plus grand que les plus gigantesques cardinaux dont on parlé
depuis l'introduction par Cantor de la théorie des cardinaux,
*plus grands que les cardinaux dits « **inaccessibles** » ou autres.*
*«**Inaccessibles** », et pourtant accessible puisqu'il s'agit de l' « **Infini dénombrable** ».*
*« **Infini dénombrable** » et pourtant plus grand que tous les «**Inaccessibles** ».*
*Il ne faut plus raisonner en logique de **Négation** ou d'**Identité**,*
*il faut simplement raisonner maintenant en logique d'**Alternation** et d'**Equivalence**,*
*en logique de **Cycle**, la logique de la **structure FRACTALE**.*
*Il ne faut plus commettre l'erreur qu'on fait avec la logique de **Négation** ou d'**Identité***
de dire que ce n'est pas le même objet
parce que ce triangle-ci est d'échelle moitié ou double de celui-là, etc.
Chaque version, à son échelle, est exactement la même chose que le grand modéle!
Les considérations habituelles de relation de supériorité d'infériorité s'arrêtent avec la fractale.
On change complètement de logique, on raisonne différemment, on voit autrement l'Univers !
*On voit par exemple que cette **structure FRACTALE***
*est un ensemble qui compte une **INFINITÉ** de versions de lui-même en lui-même.*
*Et pourtant aussi il n'en compte que **3**, ou plutôt **9**…*
*à moins que la vérité ne soit que **27** ou **81**, ou même seulement… **1** !*
*C'est cela une **structure FRACTALE**, avec elle finies les sciences*
où l'on ne dit que « $0 \neq 1$ » et pas aussi « $0 = 1$ » !
*On tourne la page des sciences qui disent qu'il est « impossible » de **diviser par 0**,*
*car **0** n'est pas que **0**, mais il est aussi **1** et même l'**Infini** !*



U = (UUU.UU.UUU).(UUUU).(UUU.UU.UUU)
U = 20 × U
20 = (3 + 2 + 3) + 4 + (3 + 2 + 3)

*Le **générande** de l'Eponge de Menger (une autre structure fractale) est **20**.*
*Cette éponge, comme toutes les fractales, est elle aussi un **ensemble infini**,*
qui compte une infinité d'exemplaires de lui-même en lui-même,
bref qui compte un nombre ω d'exemplaires.
*Et pourtant, il n'en compte… que **20** !*
*On a donc **ω = 20 ω** ou **U = 20 U**.*
*On a aussi : **ω = 400 ω**, et **ω = 8000 ω**, etc.*
*On a la chaîne d'équivalences : **1 = 20 = 400 = 8000 = …***
*qui est commune à toutes les **structures Fractales** de **générande 20**,*
*et on a l'équivalence : **0 = ω**, commune à toutes les **structures Fractales**.*
*La **formule brute** de **générescence** est : **U = 20 U**,*
*et la **formule développée** ou **formule de la structure générescente** est :*
***U = (UUU.UU.UUU).(UUUU).(UUU.UU.UUU)**.*
*Le symbole « **.** » qui sert à écrire cette structure*
*est l'**opérateur de constitution**, de **concaténation***
*ou d'**addition physique** appelé le **HENER**, un important **opérateur des générescences**.*
*Il est la définition fondamentale de l'opération que nous appelons l'**addition** en arithmétique ?*
c'est donc dire son importance, il est simplement l'opérateur de base
*de l'**arithmétique des ordinaux**, la vraie arithmétique et algèbre,*
*conforme à la logique profonde des ordinaux, à leur nature **cyclique** et **fractale**.*
*La structure précédente s'écrit en arithmétique : **1 = (3 + 2 + 3) + 4 + (3 + 2 + 3)***
*ou **1 = 20** sans développer la structure donc l'addition.*
*Un autre **opérateur de générescence** de très grande importance est le **GENER***
*noté « **…** » , qui signifie l'**itération infinie** du modèle auquel il est appliqué,*
*plus précisément l'**itération** du modèle un nombre de fois égal à ω.*
*Par exemple, « **U…** » (lire « **U GENER** ») signifie que **U** est **itéré ω fois**.*
*Par conséquent, la générescence « **U…** » est simplement synonyme de ω.*
*Et plus précisément encore, « **0…** » est l'ordinal ω et le cardinal (**ω - 1**).*
*Cet opérateur **GENER** est très important dans la structure des **ordinaux**, en particulier **infinis**.*

On l'a compris, l'ordinal ω = **{0, 1, 2, 3, 4, …}** est d'une extrême importance, d'importance de même que le **0**, le premier ordinal et cardinal, qui est donc l'**Ensemble Vide** et qui est son premier élément. A eux deux, c'est tout le secret des ordinaux et cardinaux, c'est tout le secret des univers ! Quand on connait l'ordinal ω (oui l'**Oméga** !) , quand on connaît l'**Ordinal Infini… Canonique**, quand on connaît l'**Univers Infini Canonique** (qui est tout simplement le simple **schème des parenthésages** ou l'**univers des ensembles héréditairement finis**), on a tout compris sur les **ensembles**, car le reste est une simple affaire de **Cycle**, de **Répétition**, d'**Itération** de cet **Univers** ! Quand on connaît un phénomène périodique (comme par exemples les fonctions trigonométriques en mathématiques) ou les phénomènes ondulatoires en physiques (car c'est exactement de cela qu'il s'agit ici, nous sommes tout simplement en train de découvrir profondément la nature ondulatoire, vibratoire, quantique, etc., de l'**Univers** !), quand on connait donc un phénomène périodique sur une **période** ou **cycle**, on le connaît sur toutes les **périodes**, sur tous les **cycles**. Inutile donc de l'étudier sur l'infinité des **cycles**, un seul suffit, et ce seul, c'est justement le **Cycle Oméga** ! Quand on connaît ce premier ordinal et cardinal infini, on connaît tous les ordinaux et tous les cardinaux (deux notions qu'il ne faut plus séparer, on comprendra mieux un peu plus loin).

C'est parce que j'étais influencé par l'actuelle théorie des cardinaux que j'ai appelé $\mathbf{U_0}$ le **premier univers infini**, exactement comme on a appelé $\aleph_0$ le **premier cardinal infini**. Mais réflexion faite et avec la pleine compréhension de la logique des univers qui arriva avec la Théorie universelle des ensembles, il est plus approprié d'appeler $\mathbf{U_0}$ simplement le **premier univers**, à savoir l'**ensemble vide** ou $\varnothing$ ou **0** ; et $\mathbf{U_1}$ le **second univers** (donc **premier univers infini** que nommais $\mathbf{U_0}$) ; puis $\mathbf{U_2}$ le **troisième univers** (donc le **second univers infini**) ; puis $\mathbf{U_3}$ le **quatrième univers** (donc le **troisième univers infini**), etc. C'est juste une question de numéroter **tous les univers** à commencer par le premier d'entre eux, et ne pas tomber dans les pièges dans lesquels on est tombé actuellement avec la théorie des ordinaux et des cardinaux, parce qu'on ne fonctionne pas dans le bon paradigme, le **Cycle** ou l'**Equivalence** ou l'**Alternation**, mais avec la **Droite** ou l'**Identité** ou la **Négation** (comme on va commencer à le comprendre et plus encore dans la prochaine partie).

L'**univers vide**, que j'appelle maintenant l'univers **Alpha**, que je pensais juste trivial, s'est révélé beaucoup plus important que je ne le pensais, il est l'une des deux clefs du système des **univers**, l'autre importante clef étant l'**Univers des ensembles**, $\mathcal{U}$, l'**univers plein**, l'**Oméga**. L'**Alpha** et l'**Oméga** sont les deux extrémités de la hiérarchie des choses extraordinaires que sont les univers, et plus exactement de leur extraordinaire structure, qui est tout simplement la **structure FRACTALE**, comme je le dis depuis le début.

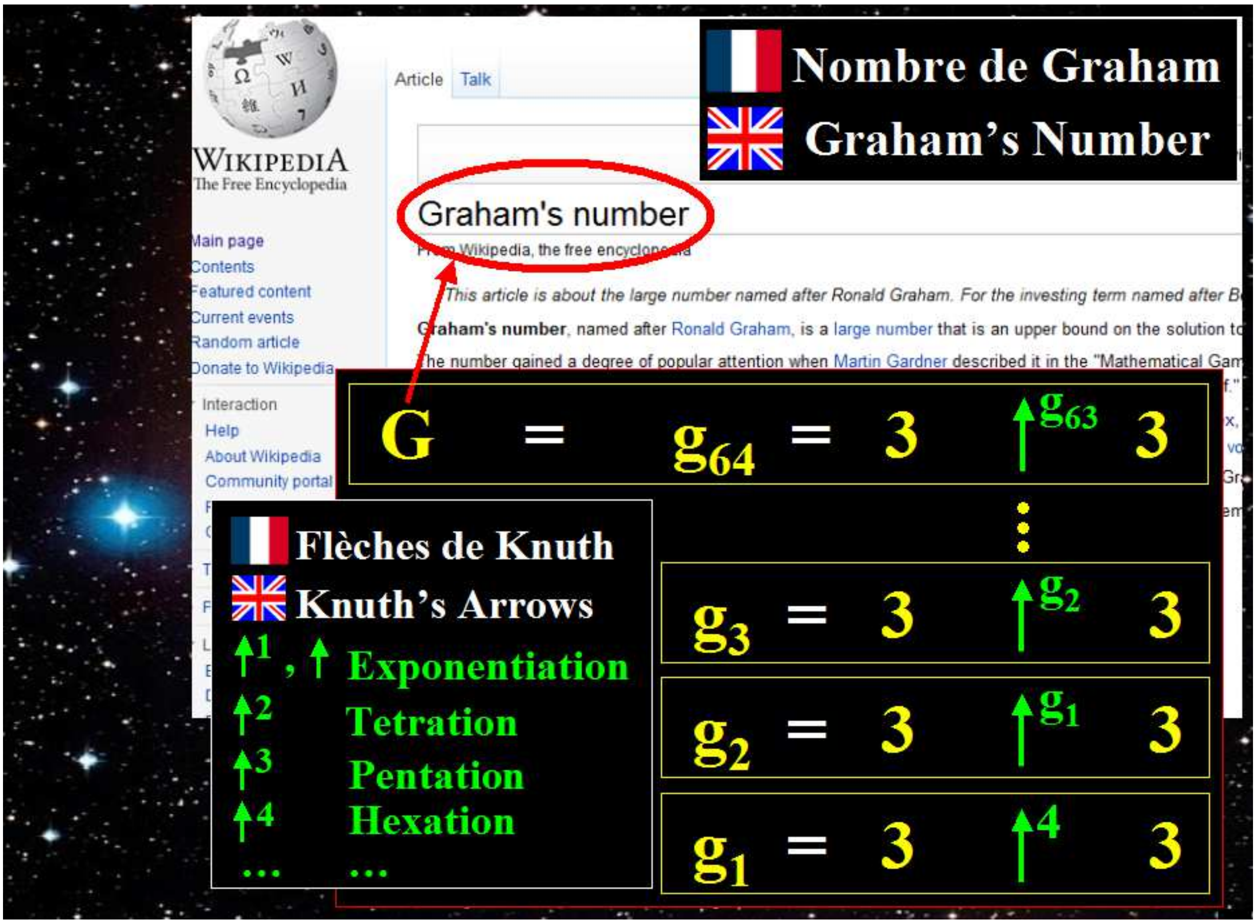
L'univers $\mathbf{U_1}$, le **schème des parenthésages**, l'univers des **ensembles héréditairement finis**, est donc l'univers engendré par l'univers $\mathbf{U_0}$, alias l'**ensemble vide** ou $\varnothing$ ou **0**. A son tour, il engendre l'univers $\mathbf{U_2}$, qui vérifie donc l'**axiome de l'infini**, puisqu'il contient $\mathbf{U_1}$ qui est l'**univers** dit « **infini dénombrable** » mais que je dis « **canonique** ». L'univers $\mathbf{U_2}$ a la puissance de **ZFC + AF**, c'est-à-dire le modèle de **Zermelo-Fraenkel** vérifiant l'**axiome du choix** et l'**axiome de fondation**. Et à son tour, $\mathbf{U_1}$ engendre l'univers $\mathbf{U_3}$ qui est d'un tout autre ordre ! Et plus généralement, pour tout ordinal α, on a l'univers $\mathbf{U_\alpha}$. Quand on connaît la grandeur du **dernier ordinal** de $\mathbf{U_2}$ (donc qui mesure la grandeur de $\mathbf{U_2}$, son cardinal donc) qu'on appellera par exemple $\mathbf{\Omega}$, un ordinal qui est donc plus grand que tous les ordinaux de **ZFC + AF**, alors qu'on essaie d'imaginer le « monstre » de grandeur que peut être l'univers $\mathbf{U_\Omega}$! Qu'on imagine son cardinal $\mathbf{\Omega_1}$, et l'univers $\mathbf{U_{\Omega 1}}$ et le cardinal de $\mathbf{U_{\Omega 1}}$, à savoir $\mathbf{\Omega_2}$, etc.

Comme déjà dit plus haut, ce sont des cardinaux infinis extraordinairement gigantesques ! Et pourtant, si grands soient-ils, on parle toujours du seul et même ω, le cardinal de $\mathbf{U_1}$, l'univers des **ensembles héréditairement finis**, ensemble qualifiés actuellement d'« **infini dénombrable** » !

Cela veut dire simplement que le cardinal des nombres entiers naturels est infiniment plus grand qu'on ne le pense, car tous les cardinaux géants expriment sa grandeur, ils sont ses différentes facettes. Et cela veut dire aussi surtout que les entiers naturels sont plus que ce l'on pense, ils sont tout simplement TOUTES les choses, nous, tout ce qui nous entoure, les galaxies, les univers. Nous en avons parlé dans l'introduction générale, nous en reparlerons aussi dans la partie C. Et le site http://hubertelie.com développe cela en long et en large.

Si l'on donc parle des **ordinaux** et des **cardinaux** en ignorant le **Cycle** ou la **structure FRACTALE** des ensembles, ces **ordinaux** et ces **cardinaux** sont **FAUX**, on parle de nombres infinis qui sont des chimères, qui ne correspondent à aucune réalité de l'Univers, ou plutôt qui traduisent faussement les réalités de l'Univers. Car s'ils traduisaient ces réalités comme cela devrait être le cas, on aurait compris depuis longtemps la vraie nature et le SENS des nombres, et en particulier des **nombres entiers naturels**. On n'en parlerait pas comme de choses purement « mentales », **abstraites**, qui n'ont aucune réalité physique. Mais on aurait compris que les nombres sont toutes les choses de l'Univers, toutes les choses des univers. On aurait compris simplement ceci : nous sommes des **nombres** ! Oui, nous sommes des éléments de l'**ensemble des entiers naturels** ! Nous sommes de grands nombres, de très grands nombres. Les ordinaux finis ou infinis dont on parle, c'est nous, à la fois finis et à la fois infinis ! Si donc on ne travaillait pas dans la pure abstraction (en raison de la **Négation**) , on courrait derrière des « grands cardinaux » ou des « cardinaux inaccessibles », alors que tous ces cardinaux… sont dans l'ensembles des entiers naturels !

A-t-on fini de comprendre la nature et le sens des nombres gigantesques comme le **nombre de Graham** avant de chercher à percer les mystères des « cardinaux inaccessibles » ?



Sait-on tout sur par exemple ce nombre que je vais écrire avec la notation des flèches de Conway ?

54 → 12 → 1287 → 611159 → 280500 → 170704 → G → 208 → 425 + 241 → 130404 ?

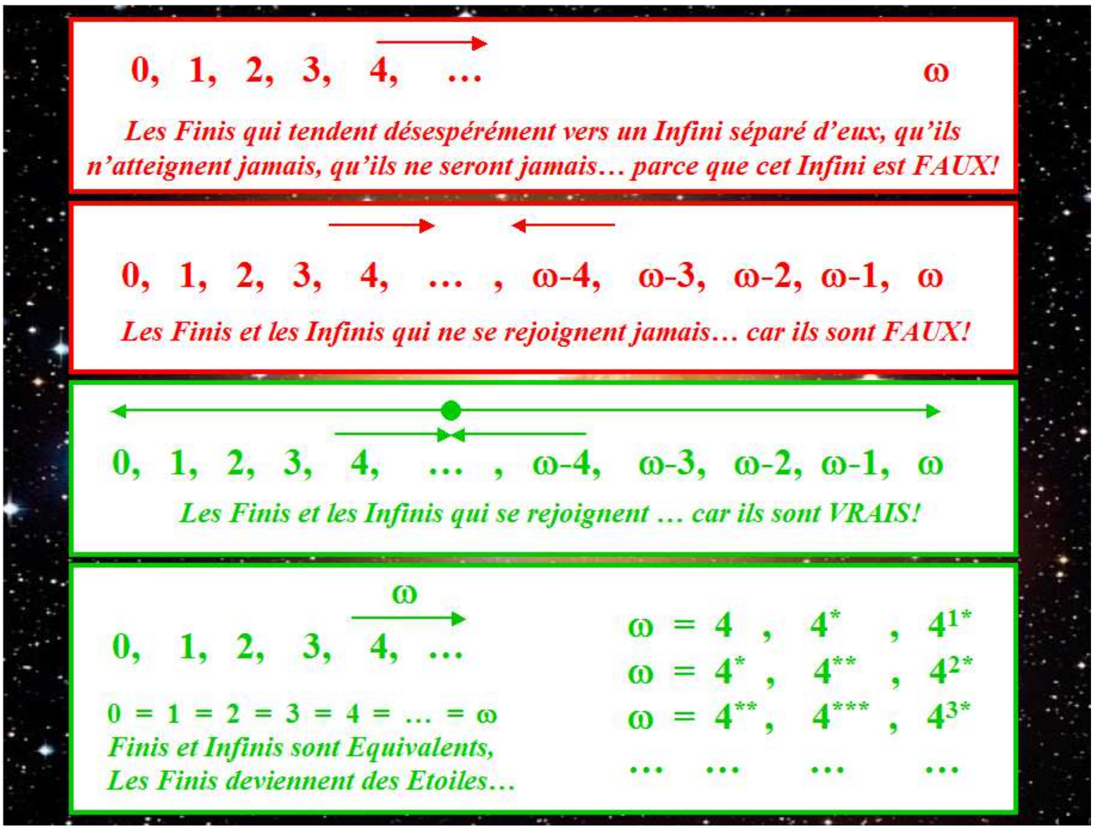
A-t-on fini de « dénombrer » ce « simple » nombre « entier naturel », est-on sûr qu'il est vraiment fini ou qu'il **n'est que fini**, connaît-on les propriétés d'un « simplexe » dont le nombre de sommets est ce « simple » nombre « entier naturel » avant de s'inquiéter de problèmes concernant des cardinaux « inaccessibles » ?

Bref, TOUT est déjà dans les nombres entiers naturels, dans l'univers $\mathbf{U_1}$, le **schème des parenthésages**, l'univers des **ensembles héréditairement finis**. Avoir compris cet ensemble c'est avoir tout compris.

Le théorème de Löwenheim-Skolem dit dans ses grandes lignes que toute théorie qui possède un modèle de n'importe quel cardinal infini possède aussi un modèle infini dénombrable. Et en particulier, la théorie des ensembles de ZFC, ou simplement l'univers $\mathbf{U_2}$, qui contient non seulement des ensembles « infinis indénombrables » (comme par exemple l'ensemble des nombres réels) possède un équivalent infini dénombrable, ce qui veut dire un équivalent à $\mathbf{U_1}$, ce qui constitue le paradoxe de Skolem.

Mais on n'a pas compris le sens réel de ce théorème, à savoir ce que je viens de dire : que **TOUT est déjà dans les nombres entiers naturels**. C'est au cœur même des nombres entiers naturels que j'ai exhibé le **schème des parenthésages**, l'univers $\mathbf{U_1}$ (qui est un modèle ZFC+ AF moins l'axiome de l'infini, car cet axiome n'était pas nécessaire car justement $\mathbf{U_1}$ suffisait déjà), qui a servi de point de départ à la Théorie des Univers et auquel je suis revenu car toute la théorie indiquait que ce modèle était vraiment **universel**, que tous les secrets, toutes les réponses, s'y trouvaient déjà. Et cette vérité devient maintenant une évidence frappante avec la **structure FRACTALE** de l'**Univers des ensembles**. C'est cette vérité profonde que voulait dire le théorème de Löwenheim-Skolem et le paradoxe de Skolem. Comme le paradoxe de Russell, de Burali-Forti et d'autres, c'est un pseudo-paradoxe, mais pas pour les raisons qu'on avance qui résolvent en rien le problème de fond qui est la **Négation**.

Et que disent en réalité les théorèmes d'incomplétude de Gödel sinon simplement qu'une théorie des ensembles qui se veut suffisamment forte dans le paradigme de la **Négation** ne peut pas être complète ! En effet, pour qu'elle soit complète, pour qu'elle clôture, il faut qu'elle « boucle », il faut qu'elle adopte une **structure FRACTALE** ou le **Cycle**, il faut qu'elle dise simplement:
« **Ensemble Vide = Ensemble Plein** », « **Commencement = Fin** », « **Alpha = Oméga** », « $\mathbf{0 = \omega}$ »,
ou simplement « $\mathbf{0 = 1}$ » ! Mais dire cela signifie qu'on ne fonctionne plus avec l'**Identité** ou la **Négation** qui interdisent ces **équivalences** ! Voilà le vrai problème et voilà l'unique solution, la vraie !



*La conception des ordinaux, du **Zéro** et de l'**Infini**,*
*est fausse dans le paradigme de l'**Identité** ou de la **Négation**.*
*C'est dans le paradigme de l'**Equivalence** et d'**Alternation** que les ordinaux deviennent vrais.*
*Autrement dit, les ordinaux réclament le **Cycle Oméga** : « $\mathbf{0 = \omega}$ »*
*ou même simplement le modeste **Cycle 1** : « **0 = 1** » !*
*Sans le **Cycle**, l'**Infini** est séparé du **Fini**, la cohésion des nombres est brisée!*
*La zone **GENER** (la zone de l'opérateur noté « **…** »)*
*qui normalement est la **jonction** entre le domaine du **Fini** et le domaine de l'**Infini**,*
*devient au contraire la zone de **clivage**, de **séparation** entre ces deux domaines.*
*La notion d' « **ordinal limite** » (comme ici le premier ω)*
a elle seule incarne toute la fausseté de la conception traditionnelle des ordinaux.
Les ordinaux finis tendent vers cet ordinal limite sans jamais l'atteindre
ce qui veut dire qu'il a très peu de rapport avec eux, à part dire qu'il est leur ensemble…

Le premier ordinal infini est donc $\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Le second ordinal infini est $\omega+1$, est très exactement l'ensemble obtenu en ajoutant ω lui-même à ses propres éléments, donc aux entiers naturels : $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \omega\}$.
L'ordinal suivant est : $\omega + 2 = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \omega, \omega+1\}$,
ce qui veut dire qu'on ajoute $\omega+1$ à ses propres éléments pour avoir l'ordinal suivant.
L'ordinal suivant est : $\omega + 3 = (\omega + 2) \cup \{\omega + 2\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2\}$,
et ainsi de suite. D'une manière générale, on ajoute un ordinal α à ses propres éléments pour avoir l'ordinal suivant, sont successeur, à savoir $\alpha + 1$.

On voit ainsi que l'on définit tout simplement le début d'une nouvelle arithmétique, celle des ordinaux, qui généralise celle des **ordinaux finis** ou **entiers naturels**. On vient de définir tous les ordinaux de la forme $\omega + n$, où n est un ordinal fini ou entier naturel. Dans la conception actuelle des ordinaux (qui est, « hélas », aussi celle de la Théorie des Univers, je dis « hélas » car il n'y a pas mort d'homme non plus, il suffit de comprendre maintenant les limites des conceptions et les améliorations qu'il faut apporter…)

Et l'ensemble formé par les entiers naturels et les ordinaux de la forme $\omega + n$ est par définition l'ordinal $\omega + \omega$, donc 2ω , que les mauvais paradigmes actuels obligent à noter plutôt $\omega 2$, car, avec les ordinaux infinis on n'a pas la simple commutativité de la multiplication: $2\omega = \omega 2$ à laquelle nous sommes habitués (on ne vas pas tarder à comprendre les raisons de cette aberration et d'autres). L'ordinal 2ω est donc l'ensemble : $2\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \omega + 4, \ldots\}$.

Puis, exactement de la même façon, on passe à la série des ordinaux de la forme $2\omega + n$, où n est un ordinal fini ou entier naturel. En ajoutant ceux-ci à l'ensemble 2ω précédent, on a donc l'ensemble 3ω, qui est donc :
$3\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \omega + 4, \ldots, 2\omega, 2\omega + 1, 2\omega + 2, 2\omega + 3, 2\omega + 4, \ldots\}$.
Et ainsi de suite pour avoir tous les ordinaux de la forme $n\omega$, où n est un ordinal fini.

Vue la forme de l'ordinal $n\omega$, on comprend facilement qu'après cette série, on va attaquer une nouvelle grande série avec l'ordinal ω^2, qui est donc le commencement d'une nouvelle grande série de la forme ω^n, après laquelle viendra l'ordinal ω^ω, et ainsi de suite.

Le symbole « **…** » qui sert à écrire la liste des éléments d'un ordinal quand il est infini, le premier du genre étant $\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, n'est pas un simple symbole, un élément de typographie ou d'écriture de la liste des éléments d'un ensemble (en particulier quand il est infini), comme le pense actuellement. Dans la Théorie universelle des ensembles il est un véritable opérateur qui est le **GENER**, un opérateur de la notion de **générescence** dont j'ai parlé dans l'introduction générale, encore une fois un peu plus haut avec les fractales, et dont je reparlerai dans la partie C. Il est un élément très important de la compréhension de la nature, de la structure et de la logique des ordinaux, à savoir tout simplement que les ordinaux sont de nature… **CYCLIQUE** ! Cela saute aux yeux !

Par exemple, revoyons la liste des éléments de l'ordinal 3ω:
$3\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \omega + 4, \ldots, 2\omega, 2\omega + 1, 2\omega + 2, 2\omega + 3, 2\omega + 4, \ldots\}$.
On voir tout simplement qu'après la suite des ordinaux appelés les ordinaux finis : $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, on recommence une nouvelle série d'ordinaux dans laquelle ω joue tout simplement le rôle du nouveau **0**, et $\omega + 1$ le rôle du nouveau **1**, et $\omega + 2$ le rôle du nouveau **2**, etc. Autrement dit, on recommence toute simplement un nouveau **CYCLE** des mêmes ordinaux finis. On parle d'une nouvelle version des mêmes entiers, ceux du second **cycle** de ω, le premier **cycle** étant les entiers naturels, dont l'ensemble est $\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Les ordinaux du second **cycle** de ω ne sont pas **identiques** à ceux du premier **cycle**, évidemment, autrement dit ils sont différents au sens de l'**Identité**. Mais il est évident aussi que chaque ordinal du second **cycle** est **ÉQUIVALENT** à l'ordinal correspondant du premier **cycle**.

Ainsi, **0** et ω sont **équivalents**, ce qui s'exprime par l'**équivalence** : «$0 = \omega$». De cela découle le fait aussi «$1 = \omega + 1$», «$2 = \omega + 2$», «$3 = \omega + 3$», etc. C'est l'équivalence fondamentale, qui veut dire simplement ceci : « On est en présence d'un phénomène **périodique**, **cyclique**. Si l'on connaît tous les ordinaux et leurs propriétés sur un **cycle** des ordinaux, sur une **période**, à savoir sur l'intervalle de **0** à ω, alors on connaît aussi les ordinaux sur **tous les cycles**. »

Et pour aller plus loin encore, il faut dire que les théories des ordinaux actuelles affirment que l'ordinal **0** n'a pas de prédécesseur, ainsi que l'ordinal ω. Mais là encore, erreur ! parce qu'on ne raisonne pas en logique de **cycle**, car l'**équivalence** : «**0 =** ω » veut dire aussi « **-1 =** ω **- 1** », « **-2 =** ω **- 2** », « **-3 =** ω **- 3** », etc., et « **-**ω **= 0** ». Autrement dit, l'ordinal **0** est la fin d'un cycle des ordinaux qui commence par **-**ω, lui-même la fin d'un cycle qui commence par **-2**ω, etc. Et toutes ces équivalences disent la même chose : «**0 =** ω ».

Bref, si l'on a un jour compris comment ça marche les fonctions trigonométriques **sinus**, **cosinus**, qui sont périodiques (ou cycliques) et de période **2**π, si l'on sait qu'il suffit de connaître la fonction sur une période, la période de référence étant l'intervalle **[0, 2**π**]**, alors on a compris aussi comment marchent les ordinaux. Car l'intervalle **[0, 2**π**]** n'est que l'intervalle des ordinaux **[0,** ω**]**, avec le changement d'échelle effectué par cette équivalence : ω **= 2**π. Autrement dit, on a « compacté » l'intervalle infini des ordinaux pour le ramener à un intervalle fini de longueur **2**π. Dans les deux cas, c'est une banale affaire de **cycle**.

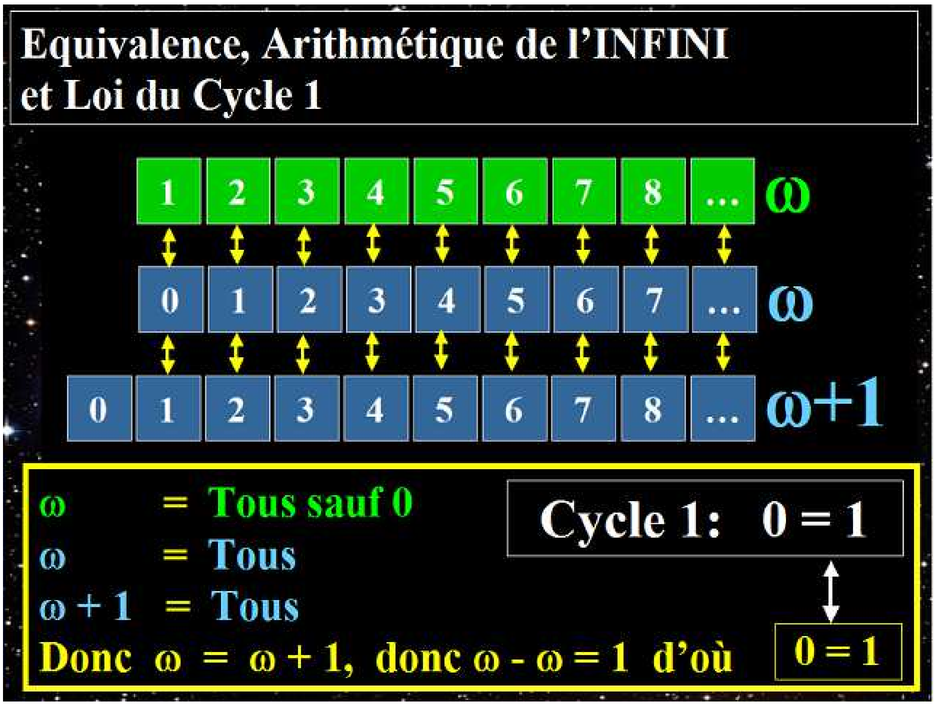
Parce que les actuelles théories des ensembles ne se font pas dans le paradigme du **Cycle**, les **ordinaux** et les **cardinaux**, qui sont en fait la seule et même notion mais vue sous deux angles différents (les uns sont les **formes** ou **formations** et les autres sont les **informes** ou **informations**), et de plus des notions entre lesquels il y a seulement un décalage d'une unité (le cardinal **0** est l'ordinal **1**, le cardinal **1** est l'ordinal **2**, et le cardinal ω est l'ordinal ω **+ 1**, etc.), sont maintenant terriblement séparés dans le domaine de l'Infini (ils continuent à coïncider, heureusement dans le domaine Fini). C'est le même problème de la séparation entre les **porcs** et les **cochons** dont je parle depuis le début, problème dû à la **Négation Absolue**, la **Séparatrice** et la grande **Tronçonneuse** par excellence ! De même, les arithmétiques des ordinaux et des cardinaux, qui coïncident (heureusement…) dans le domaine Fini, sont séparées dans le domaine Infini : on a l'arithmétique des ordinaux infinis d'une part et celle des cardinaux infinis d'autre part. Et de plus ces deux arithmétiques sont maintenant séparées de celle des ordinaux finis. Bref, ce qui dans le paradigme de l'**Equivalence** (ou de l'**Alternation**) devait être une seule et même arithmétique (celle des nombres finis et infinis) a littéralement explosé en plusieurs arithmétiques du fait de l'**Identité** (ou de la **Négation**), du fait donc qu'on ne raisonne pas avec le **Cycle**.

Par exemple, l'égalité $\omega = \omega + 1$ est vérifiée par ω en tant que **cardinal**, mais rejetée comme fausse pour le même ω en tant qu'**ordinal** ! Plus généralement, les égalités comme : $\alpha = \alpha + 1$, $\alpha = \alpha + \alpha$, $\alpha = \alpha^2$, $\alpha = \alpha^n$ (où **n** est un entier naturel), etc. sont vérifiées par tous les **cardinaux** α, mais ne sont vérifiées pour **aucun ordinal**, fini ou infini.

Et de plus, pour un cardinal α, on pourrait penser que sa propriété extraordinaire « $\alpha = \alpha + 1$ » autorise à faire les calculs suivants comme pour les nombres finis :
$\alpha = \alpha + 1$, donc $\alpha - \alpha = 1$, donc : $0 = 1$.
Mais non ! Car «**0 = 1**» est interdit par l'**Identité**, qui n'autorise que les égalités de la forme :
«**0 = 0**», «**1 = 1**», «**2 = 2**», «**3 = 3**», «$\alpha = \alpha$», «$\omega = \omega$», «**X = X**», etc.

Or «**0 = 1**» est la **Loi du Cycle 1** et surtout « $\alpha = \alpha + 1$ » est l'une des expressions mêmes de l'Infinité !

En effet, on comprend intuitivement que l'Infini est par définition le nombre qui reste lui-même quand on lui ajoute **1** ! Et dire que l'expression de l'Infinité « $\alpha = \alpha + 1$ » est synonyme du cycle 1 ou «**0 = 1**», c'est simplement exprimer la subtile vérité selon laquelle pour un nombre infini α, **1** est **0**, puisque lui ajouter **1** c'est comme lui ajouter **0** (étant donné qu'il est INFINI)! On comprend donc intuitivement le **SENS** de ces opérations, ce que l'Infini veut nous dire et qu'on ne pourrait pas le comprendre avec les nombres finis ou les nombres qui ne sont pas suffisamment grands pour que leur ajouter **1** soit comme leur ajouter **0**. Si donc on dit « $\omega = \omega + 1$» ou « $\alpha = \alpha + 1$ » sans faire ces opérations normales des nombres qui débouchent sur le cycle qui révèle leurs sens, on ne comprend en fait pas grand chose aux ordinaux et aux cardinaux infinis.



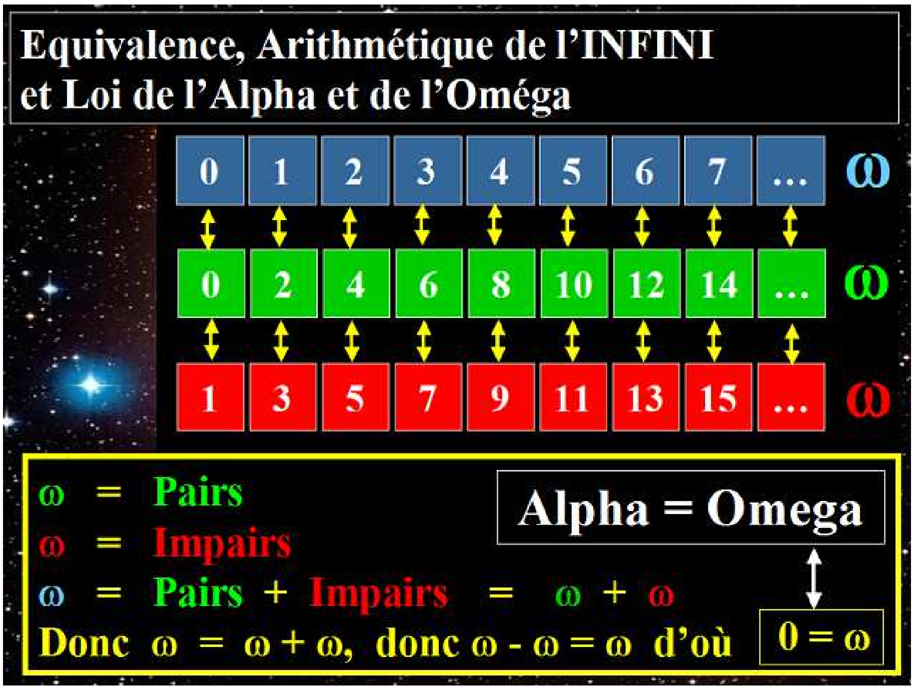
Dans l'arithmétique des cardinaux,
on sait que l'ensemble des entiers naturels est équipotent à lui-même moins un élément,
autrement dit les ensembles **{1, 2, 3, 4, …}** *et* **{0, 1, 2, 3, 4, …}**
ont exactement le même nombre d'élément, à savoir **ω** *, même si 0 manque dans le premier*.
En effet, on peut mettre en bijection les deux ensembles, comme le montre le schéma.
Cela veut dire tout simplement que le cardinal **ω** *vérifie :* **ω = ω + 1**.
C'est l'une des propriétés fondamentales de l'Infini.
Cette propriété est synonyme aussi du Cycle 1 : ***0 = 1***.
Mais les mathématiques actuelles refusent de se bâtir sur cette égalité,
ou de faire ce calcul simple pour la trouver.

La loi « **α = α + 1** » est aussi appelée la **Loi de Récurrence** ou la **Loi de l'Induction**, l'expression très simple de la fameuse **Récurrence** quand elle est faite dans le paradigme de l'**Equivalence** ou du **Cycle**. Les choses deviennent très compliquées dans le paradigme de l'**Identité** (ou de la **Négation**) alors qu'en fait elles sont aussi simples que le **Cercle** ou le **Cycle** qui tourne et qui inscrit « **+1** » à son compte-tour à chaque tour. Et à chaque tour on revient au point **0**, et la situation est comme si on n'avait pas bougé. C'est ce que veut dire aussi l'équivalence « **α = α + 1** » et sa forme simplifiée «**0 = 1**» ou **Cycle 1**.

C'est donc l'ordinal **0** qui démarre la **récurrence** avec «**0 = 1**», ce qui implique (en ajoutant 1 aux deux membres) que : «**1 = 2**» , puis que «**2= 3**», etc.
Autrement dit, si « **α = α + 1** », alors : « **α + 1 = α + 2** », qui est la **loi d'hérédité** de la **récurrence**.
On a la chaîne des équivalences : **0 = 1 = 2 = 3 = 4 = …** .

Une autre égalité des cardinaux de très grande importance : « **α = α + α** ». De la même façon, en faisant normalement les calculs, cela donne : **α = α + α** , donc **α - α = α** , donc : **0 = α** .
Avec le cas particulier du cardinal **ω**, cela donne donc :
ω = ω + ω , donc **ω - ω = ω** , donc : **0 = ω** , qui se lit : « **Zéro = Infini** » ou « **Alpha = Oméga** », où Alpha n'est pas à comprendre comme un ordinal ou un cardinal quelconque mais le nom spécial réservé à l'**ordinal** et **cardinal 0**.

L'équivalence est « **0 = ω**» est l'expression du **Cycle ω** (**Cycle Oméga**), la **Loi de l'Alpha et de l'Oméga**, l'expression fondamentale de l'Infinité !



Si la loi « **α = α + 1** » est la **Loi de Récurrence**, la loi « **α = α + α** », de laquelle on déduit la **Loi du Cycle α**, à savoir « **0 = α**», est quant à elle la **Loi de l'Itération**. Plus particulièrement, c'est avec que cette loi est ainsi nommée car c'est en fait lui qui est la cause ou la base même de cette loi générale des cardinaux et aussi de tous les ordinaux ! La **Loi d'Itération** est donc : « **ω = ω + ω** ».

Bref, toute la sciences des ordinaux et des cardinaux est dans le **Cycle Oméga** : **0 = ω**. Et toute la **science des ensembles** dans l'univers **U_1**, le **schème des parenthésages** qui fut le point de départ de la Théorie des Univers, qui a permis la construction d'univers extraordinairement infinis, univers dont la compréhension a ramené à l'univers fondamental : l'univers **U_1**. Tout est donc dans ce modèle universel. Avec ce schème tous les axiomes deviennent des théorèmes, et la voie est alors tracée vers la Théorie universelle ses ensembles, la Science de l'Univers TOTAL..

Mutation de 2003, vers la Théorie universelle des ensembles

I - Construction d'un modèle universel

1. Les parenthésages

On se donne deux symboles quelconques distincts, par exemple les deux symboles de parenthèses , savoir "(" et ")". On s'intéresse aux assemblages ne comportant que ces deux symboles, par exemple))))(ou ()(()(((((. Parmi eux, on s'intéresse encore plus particulièrement à ceux que nous appelons *parenthésages* ou *structures de parenthèses* et qui sont formés d'après les règles suivantes :

(P_1) : ( ) est un parenthésage. Il est dit *vide* et on le note ∅.

(P_2) Soit un parenthésage *a*. L'assemblage (*a*) obtenu en insérant en tête de l'assemblage *a* la parenthèse ouvrante et en insérant en queue de *a* la parenthèse fermante est un nouveau parenthésage appelé un *singleton*.

(P_3) Soient deux parenthésages *a* et *b*. Alors l'assemblage *ab* obtenu en faisant suivre par concaténation l'assemblage *a* par *b* est un nouveau parenthésage appelé la *réunion* de *a* et *b*.

(P_4) Tous les parenthésages sont obtenus par application répétée des trois règles précédentes. Notons ***P*** la collection des parenthésages.

Comme le terme "parenthésage" le laisse entendre, les assemblages formés ci-dessus indiquent toutes les structures possibles de parenthèses encadrant surtout les expressions mathématiques. Par exemple, la structure de parenthèses de l'expression [(x + 5) – 2(x + 4)][x – 7(3 + x)] est [( )( )][( )] , ce qui correspond au parenthésage (( )( ))(( )) , soit (∅∅)(∅) .

Nous allons par la suite énoncer des propriétés des parenthésages. Ces propriétés sont suffisamment évidentes pour que nous nous permettions de nous passer de démonstrations qui alourdiraient et allongeraient inutilement l'exposé de cette partie. Ces vérifications sont laissées au soin du lecteur. Par exemple, pour un parenthésage *a*, les propriétés suivantes sont évidentes, nombre d'entre elles étant des plus classiques :

– *a* commence toujours par une parenthèse ouvrante et se termine par une parenthèse fermante.

– *a* comporte *n* parenthèses ouvrantes et *n* parenthèses fermantes, *n* étant un entier naturel non nul. De plus, chaque parenthèse ouvrante de *a* est appariée à une parenthèse fermante et à une seule de *a* et vice versa.

– *a* est de la forme $c_1 c_2 ... c_n$ appelée la *décomposition* de *a*, où *n* est un entier naturel non nul et où chaque c_i , appelé un *composant* de *a*, est soit ∅, soit un singleton. Si $c_i \neq \emptyset$, alors il est de la forme (e_i). On dit alors que e_i *appartient* à *a* ou est un *élément* de *a* et on note $e_i \in a$. On voit qu'un parenthésage de la forme ∅∅…∅ n'a aucun élément. On dit aussi qu'il est vide.

– On dit que *a* est le *subélément* d'ordre 0 de *a*. Un élément de *a* est appelé un subélément d'ordre 1 de *a*; un élément d'un élément de *a* est un subélément d'ordre 2 de *a* etc. Les subéléments de *a* autres que *a* sont dits *stricts*. Les subéléments de *a* sont forcément en nombre fini puisque *a* est formé d'un nombre fini de parenthèses. De plus, il est clair que si *a* n'est pas vide, il existe alors des subéléments de *a* d'ordre maximal. Cela veut dire qu'il existe un entier *p* tel que *a* possède un ou plusieurs subéléments d'ordre *p* mais n'en possède aucun d'ordre strictement supérieur à *p*. Un subélément d'ordre *p* est alors forcément vide sinon un de ses éléments serait d'ordre $p+1$. L'entier *p* est appelé la *profondeur d'imbrication* de *a*. Concrètement, plus *p* est grand et plus la structure de parenthèses *a* possède de niveaux d'imbrication. La profondeur de ∅ est donc 0.

2. Les parenthésages ensemblistes

En interprétant la parenthèse ouvrante "(" comme 1 et la parenthèse fermante ")" comme 0 , un parenthésage peut donc être interprété comme un entier naturel s'écrivant uniquement avec des 1 et des 0. Ainsi par exemple ∅ = ( ) s'interprète comme 10 et (∅) = (( )) comme 1100. Si au contraire "(" est interprété comme 0 et ")" comme 1, alors ∅ sera interprété comme l'entier 01 et (∅) comme 0011. Dans les deux cas, on peut interpréter un parenthésage comme un développement décimal ou, si l'on veut, binaire d'un entier. Peu importe l'interprétation retenue, l'essentiel est qu'il faut qu'il associe à tout parenthésage un entier qui lui est propre de sorte que deux parenthésages soient égaux si et seulement si c'est le cas de leurs interprétations en tant qu'entiers naturels. Pour la suite, nous supposerons retenue la première ; il en découle donc une relation d'ordre stricte dans ***P*** qui est celle des entiers.

Un parenthésage est dit *réduit* s'il est égal à ∅ ou si ses composants sont non vides et deux à deux distincts. *Réduire* un parenthésage *a*, c'est donc former un nouveau parenthésage *b* en ne conservant que la première occurrence de ses composants non vides. S'il est vide, alors on ne conserve que son premier composant. Par exemple, la réduction de (∅(∅∅)∅)∅(∅)∅(∅∅)(∅)∅∅(∅∅)∅(∅), de profondeur 2 est (∅(∅∅)∅)(∅)(∅∅) également de profondeur 2.

Un parenthésage est dit *ordonné* si ses composants apparaissent de gauche à droite par ordre croissant. Ordonner un parenthésage *a* , c'est donc former un nouveau parenthésage *b* en rangeant (de gauche à droite) les composants de *a* par ordre croissant. Par exemple, l'ordonné de (∅(∅∅)∅)∅(∅)∅(∅∅)(∅)∅∅(∅∅)∅(∅) est ∅∅∅∅∅(∅)(∅)(∅)(∅∅)(∅∅)(∅(∅∅)∅), également de profondeur 2. En combinant l'opération de réduction et d'ordination, (∅(∅∅)∅)∅(∅)∅(∅∅)(∅)∅∅(∅∅)∅(∅) devient (∅)(∅∅)(∅(∅∅)∅), toujours de profondeur 2. Il est facile de constater que l'opération de réduction ou/et d'ordination d'un parenthésage *a* aboutit à un parenthésage *b* de même profondeur que *a*, étant donné que ces opérations ne consistent essentiellement qu'à éliminer les doublons dans les composants de *a* et à modifier l'ordre de concaténation de ces composants. On constate aussi que si l'on effectue les deux opérations, le résultat final est le même, que l'on réduise avant d'ordonner ou que l'on ordonne avant de réduire.

On dit d'un parenthésage a qu'il est *ensembliste* ou qu'il est un *ensemble* si tous ses subéléments (et par conséquent lui-même) sont réduits et ordonnés. Par exemple, ∅, (∅) , ((∅)) et (∅)((∅)) sont des ensembles.

Désignons par **U** la collection des ensembles (au sens défini ici).

On a le

Lemme 1
Pour qu'un parenthésage a soit un ensemble, il faut et il suffit qu'il soit réduit et ordonné et que tous ses éléments soient des ensembles.

En effet, si a est un ensemble, alors il est réduit et ordonné de même que tous ses subéléments d'ordre stricts. Soit un élément b de a; b est donc réduit et ordonné. Comme tout subélément c de b est un subélément de a, il s'en suit que c est réduit et ordonné et par conséquent b est par définition un ensemble. A l'inverse, supposons que a soit réduit et ordonné et que ses éléments soient des ensembles. Tout subélément strict de a est un subélément d'un ensemble (puisqu'il est soit un élément de a et par conséquent un ensemble, dont il est le subélément d'ordre 0, soit un subélément strict d'un élément de a, donc d'un ensemble) donc il est par définition réduit et ordonné. Et comme c'est aussi le cas de a, a est donc par définition un ensemble. CQFD.

Ce lemme implique évidemment que tous les subéléments d'un ensemble sont des ensembles.

Soit un parenthésage a est de la forme $(e_1)(e_2)\dots(e_n)$, où n est un entier non nul. En convenant de remplacer dans cette écriture toute occurrence de l'assemblage)(par une virgule ", " , $a = (e_1)(e_2)\dots(e_n)$ s'écrira donc aussi $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Ainsi par exemple, (∅)((∅)) s'écrit (∅, (∅)).

On vérifie aisément qu'un ensemble non vide a est de la forme $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, où n est un entier non nul. Dans ce cas, il est clair que ses éléments e_i sont des ensembles distincts rangés dans l'ordre croissant.

Le résultat suivant est très évident mais essentiel

THÉORÈME 1
Soit n ensembles quelconques $a_1, a_2, \dots, a_n$, n étant un entier quelconque. Il existe un ensemble $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ ayant chaque ensemble a_i comme élément.

En effet, il suffit à partir de la liste $a_1, a_2, \dots, a_n$, de former une liste $a'_1, a'_2, \dots, a'_p$, où chaque a_i figure une et une seule fois, d'ordonner ensuite la liste $a'_1, a'_2, \dots, a'_p$ pour former une liste $b_1, b_2, \dots, b_p$ et enfin de former le parenthésage $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ qui bien sûr est un ensemble possédant la propriété requise. CQFD.

L'ensemble $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ sera noté $\{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$

Naturellement ce théorème englobe le cas trivial où on n'a aucun ensemble a_i . Dans ce cas l'ensemble cherché est bien sûr vide. Soient deux ensemble a et b tels que $a < b$. (a, b) est donc un ensemble et par exemple les écritures $\{b, a, a, b, a\} = \{a, b\} = \{b, a\}$ etc. désignent tous l'ensemble (a, b).

THÉORÈME 2

La collection **U** des ensembles définis ici (les parenthésages ensemblistes) munie de la relation d'appartenance définie ∈, est un modèle universel.

Démonstration :

En effet, U satisfait les axiomes de base, et même tous les axiomes de ZFC, sauf l'axiome de l'infini.

- **Axiome l'ensemble vide**
  « Il existe un ensemble n'ayant aucun élément »

  Immédiat, car cet ensemble est justement le parenthésage noté : ∅

- **Axiome d'extensionnalité**
  « Deux ensembles ayant les mêmes éléments sont égaux »

  Evident aussi, puisque cela veut dire que ces deux ensembles, en tant qu'assemblages réduits et ordonnés, sont la même séquence de parenthèses.

- **Axiome de la paire**
  « Pour deux ensembles *a* et *b*, il existe un ensemble ayant comme éléments *a* et *b*»

  Conséquence immédiate du théorème 1

- **Axiome de l'ensemble des parties**
  « Pour tout ensemble *a*, il existe un ensemble *b* dont les éléments sont les parties de *a* »

  Une partie de *a* est simplement un ensemble *p* constitué par une partie des éléments de *a*. Le théorème 1 garantit l'existence d'un tel ensemble *p*. Tous ces ensembles sont en nombre finis, donc le même théorème assure l'existence de leur ensemble.

- **Axiome de la réunion**
  « Pour tout ensemble *a*, il existe un ensemble *b* dont les éléments sont les éléments des éléments de *a*»

  Les éléments des éléments de *a* sont en nombre fini, car cet assemblage est fini. Par conséquent le théorème 1 assure l'existence de l'ensemble cherché.

- **Schéma de remplacement**
  « Pour tout ensemble *a* et pour toute relation fonctionnelle *f*, il existe un ensemble *b* dont les éléments sont images des éléments de *a* par *f*»

  Les éléments de *a* sont en nombre fini. Et comme la relation fonctionnelle associe à chaque élément de *a* au plus une image, ces images sont dont en nombre fini. Par conséquent, le théorème 1 assure l'existence de leur ensemble.

  Tous les axiomes de base (les axiomes du modèle universel) sont donc satisfaits. Les deux axiomes suivants sont satisfaits aussi.

- **Axiome de fondation**
  « Pour tout ensemble non vide *a*, il existe un ensemble *b* de *a* tel que *a* et *b* n'ont aucun élément commun»

  Soit un ensemble non vide *a*. Considérons les profondeurs des éléments de *a* et ρ la plus petite d'entre elles. Soit *b* un élément de *a* de profondeur ρ. Si *b* est vide, alors *b* est l'ensemble cherché. Mais si *b* est non vide, alors soit *c* un élément de *b*. *c* est forcément de profondeur strictement inférieure à ρ, donc *c* ne peut pas être un élément de *a*. Donc *b* n'a aucun élément commun avec *a*.

- **Axiome du choix**
  « Tout ensemble *a* peut être muni d'une relation de bon ordre»

  Sous cette forme, l'axiome est immédiatement vérifié du simple fait qu'on parle d'un ensemble fini.

Avec la collection **U** des parenthésages ensemblistes ou *ensembles*, nous avons démontré que le système des axiomes de ZFC (moins l'axiome de l'infini) est un système de théorèmes.

II - Propriétés générales d'un schème

1 -Notion de schème. Énoncés, relations et collections relatives à un schème

Appelons un **schème** une collection U d'objets et une relation $\in$ binaire sur U. On le note $(U, \in)$. Les termes "collection" et "relation binaire" sont pour l'instant à prendre au sens intuitif, ce qui ne saurait durer.

Les objets de U sont appelés *U-ensembles* et U est l'univers des U-ensembles, le terme "univers" est à prendre dans son sens courant; il recevra un sens spécial en temps voulu. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le schème considéré, on dira simplement "ensemble" au lieu de U-ensemble. La relation $\in$ est appelée la relation d'*appartenance* de U. $x \in y$ se lit « x appartient à y » ou « x est un élément de y ». On dit aussi « y possède x » et on note $y \ni x$.

On ne fait *aucune* hypothèse concernant la collection U et la relation $\in$. Par conséquent, les notions et définitions relatives à ce schème que nous allons introduire dans ce chapitre sont très générales et sont applicables à n'importe quelle collection d'objets munie de n'importe quelle relation binaire dans cette collection. Dans le cas particulier où $\in$ est la relation d'égalité $=$, le schème $(U, =)$ noté simplement U est appelé le schème *minimal* ou le schème *canonique*. Dans ce schème, tout ensemble a exactement un élément, lui-même.

Pour se fixer les idées, considérons la collection K des entiers naturels non nuls munie la relation ε : « x est un diviseur de y ». On a alors $5 \varepsilon 15$ ou encore $6 \varepsilon 24$, mais on n'a pas $5 \varepsilon 14$. Le schème (K, ε) nous servira à illustrer les concepts généraux que nous allons introduire.

Soit un schème $(U, \in)$ et une collection U' qui est une partie (au sens intuitif) de U. Le schème $(U', \in)$ est alors appelé un *sous-schème* de $(U, \in)$.

Dans tout ce chapitre, on se donne un schème $(U, \in)$. Comme aucun axiome n'est imposé à ce schème, les notions, les définitions, les propriétés, les théorèmes etc. que nous allons établir sont dits *logiques*.

A partir de maintenant, lorsque nous employons le terme "ensemble" au sens intuitif, nous devons le préciser, car ce terme très polyvalent est pour l'instant réquisitionné pour désigner les objets de U. De même, il faut dépouiller la notion d' "appartenance" et le terme "élément" de leur sens habituel car ils ont le sens que la relation binaire retenue dans U. Nous pouvons employer ces termes dans leur sens intuitif en le précisant mais au lieu de cela, nous dirons le plus souvent "est un objet de".

a. Énoncés

Le développement d'une théorie nécessite deux types d'objets. D'une part on a les objets internes, c'est-à-dire ceux du domaine d'étude considéré (dans notre cas il s'agit des ensembles) et d'autre part on a les objets externes qui sont ceux du *métalangage*. Par exemple, nous nous servirons des notions intuitives externes d'*entier naturel*, de *variables*, d'*énoncés*, de *relations* etc. Elles ne sont externes qu'en apparence car pour la plupart de ces notions (pour ne pas dire pour toutes), on peut de diverses manières *construire* ou à défaut *définir* une sorte de *réplique* dans ZF ou même dans un univers d'ensembles ayant au moins les axiomes d'un modèle universel. Encore faut-il préciser ce que doit être une "définition" et plus généralement ce que doit être un énoncé sur les ensembles. En effet, en acceptant tout ce qui a intuitivement un sens comme énoncé ou définition valide, il n'est pas difficile d'imaginer des situations d'imprécision récurrente ou pire, recelant des cercles vicieux, voire des paradoxes. Par exemple, plaçons-nous dans notre schème (K, ε) où le mot "ensemble" a reçu le sens précis d'un objet de K, savoir un entier non nul, et où le terme "élément" signifie précisément "diviseur". En définissant dans ce schème un ensemble « rectangulaire » comme un « quadrilatère dont les côtés ont deux à deux la même mesure et ayant un angle droit », on relève sans peine les termes qui restent à leur tour à définir pour que cette définition ait le moindre sens dans ce schème. Mais une définition du genre « un *singleton* est une ensemble n'ayant qu'un seul élément » semble raisonnable même si un tel ensemble n'existe pas dans ce schème (puisque tout entier non nul a au moins deux diviseurs, 1 et lui-même). D'où, pour un schème $(U, \in)$ donné, la nécessité au préalable de *construire* (et non simplement de définir) à partir de ce schème les énoncés dont on convient qu'ils établissent la frontière de ce qu'on peut exprimer dans ce schème.

La Logique Mathématique et la Théorie des Modèles retiennent principalement une frontière dont les objets sont les énoncés dits du *premier ordre*. Cette frontière n'est bien évidemment pas inextensible mais il faut bien s'arrêter quelque part. Les extensions qu'on peut envisager donnent lieu alors à des énoncés du second ordre et une extension éventuelle de ces derniers conduira aux énoncés du troisième ordre etc. Mais quelle que soit la frontière **E** convenue, dont les objets monopolisent alors officiellement l'appellation *énoncé*, il se produit ce phénomène évident: aux objets de **E** sont automatiquement et *inévitablement* associés des énoncés (alors au sens intuitif du terme) du métalangage qu'on ne peut s'empêcher d'employer si l'on veut prendre de la hauteur et avoir une vision aussi globale et "complète" que possible de l'objet de l'étude, ici le schème $(U, \in)$. Cette remarque est valable pour n'importe quel domaine d'étude dont on s'est donné les ingrédients du *langage*, c'est-à-dire devant permettre d'en construire les énoncés. En effet, les énoncés ont un double aspect. D'une part, ils sont des objets *formels* et de ce point de vue on a à tenir des propos sur leur forme, par exemple ceux consistant à dire qu'ils comportent ou non tel ou tel symbole ou paramètre. D'autre part, et c'est bien là leur principale caractéristique, ils ont un aspect *sémantique* et on aura donc à formuler des propos sur leur véracité. Ces énoncés du métalangage, puisqu'ils ne sont à priori soumis à aucune contrainte, peuvent eux-mêmes être victimes du problème d'imprécision évoqué plus haut. On peut alors considérer une nouvelle collection V dont les objets sont la réunion (au sens intuitif) de ceux de U et **E**. On pourrait alors convenir des règles permettant de fixer une frontière pour les énoncés du métalangage, ce qui engendrera automatiquement un second métalangage qu'il faut à son tour préciser etc. Nous n'entrerons pas dans ce processus et on admettra que nos énoncés du métalangage sont "raisonnables". Ceci dit, construisons à présent ce que nous appellerons désormais les énoncés du schème $(U, \in)$.

1) *Énoncés du premier ordre sans paramètres*

D'abord donnons-nous une collection infinie dénombrable (c'est-à-dire qu'on peut numéroter) de symboles υ_1 , υ_2 , υ_3 , … appelées *variables de référence*. On utilisera généralement les lettres $x, y, z, u, v, w, t, \ldots$ pour désigner des variables.

Les énoncés sans paramètres sont des objets formels (pour cela ils sont souvent appelés *formules* sans paramètres) construits avec les variables $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \ldots$, les deux relations binaires $=$ et $\in$, les connecteurs logiques non et ou et le quantificateur existentiel $\exists$. Nous avons pour commencer ceux de la forme $x \in y$, et aussi $x = y$. Ils sont dits *atomiques*. On dit de ces énoncés qu'ils ont deux *variables libres* x et y. En particulier, les énoncés de la forme $x \in x$ ou $x = x$ sont à une variable libre x.

A partir des énoncés atomiques on forme les autres par application répétée des règles suivantes :

- *Négation* : F étant un énoncé, **non** F est un nouvel énoncé ayant les mêmes variables libres que F .
  En particulier, **non** $(x = y)$ est noté $x \neq y$ et **non** $(x \in y)$ est noté $x \notin y$.

- *Disjonction* : F et G étant des énoncés, F **ou** G est un nouvel énoncé dont les variables libres sont la réunion (au sens intuitif) de celles de F et G. Par exemple, si x et y sont les variables libres de F et y , z et t celles de G, les variables libres de F **ou** G sont x , y , z et t

- *Quantification existentielle* : Si F est un énoncé dont les variables libres sont x , y_1 , y_2 , … , y_n , $\exists x\, F$ est un nouvel énoncé dont les variables libres sont y_1 , y_2 , … , y_n . La variable x est alors dite *muette* et on peut remplacer dans l'énoncé $\exists x\, F$ toutes les occurrences de x par toute variable autre que les y_i .
  Par exemple, les variables libres de l'énoncé $x \in y$ **ou** $x = z$ sont x , y et z. Celles de l'énoncé $\exists x(x \in y$ **ou** $x = z)$ sont y et z, la variable x étant ici muette. Cet énoncé peut encore s'écrire : $\exists u(u \in y$ **ou** $u = z)$

  Remarque : Si F est un énoncé n'ayant pas u comme variable libre, alors les énoncés F $\exists u\, F$ sont équivalents, ce qui veut dire que la quantification n'a dans ce cas aucun effet. Par exemple, les énoncés $\exists u(x \in y$ **ou** $x = z)$ et $x \in y$ **ou** $x = z$ sont équivalents.

Il est commode d'introduire les notations et simplifications pratiques suivantes en accord avec les règles de la logique :

– un énoncé **non** (**non** F **ou** **non** G) sera noté F **et** G (*conjonction*).

– un énoncé **non** F **ou** G sera noté $F \Rightarrow G$ (*implication*).
– un énoncé ($F \Rightarrow G$ **et** $G \Rightarrow F$) sera noté $F \Leftrightarrow G$ (*équivalence logique*).
– un énoncé **non** ($\exists x$ **non** F) sera noté $\forall x\, F$ (*quantification universelle*).

Il est également parfois commode d'utiliser les conventions d'écriture suivantes :

– un énoncé $\exists x(x \in y$ **et** $F)$ pourra être noté $(\exists x \in y)\, F$ et se lira « il existe x appartenant à y tel que F »
– un énoncé $\forall x(x \in y \Rightarrow F)$ pourra être noté $(\forall x \in y)\, F$ et se lira « quel que soit x appartenant à y , F »

Tous les énoncés obtenus précédemment sont dits *sans paramètres*. Un énoncé E sans paramètres dont les variables libres sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sera noté $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ afin de mettre en évidence ces variables.

2) *Énoncés du premier ordre avec paramètres*

Soit $E(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ un énoncé à $k + m$ variables libres et $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des ensembles. En remplaçant dans $E(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ toutes les occurrences de la variable y_j par l'ensemble a_j , on obtient un énoncé dit avec paramètres dont les variables libres sont les x_i (donc k variables libres) et dont les paramètres sont les a_j. On pourra noter cet énoncé $E(x_1, x_2, \ldots, x_k, a_1, a_2, \ldots, a_m)$, ou $E(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ pour ne mettre en évidence que les variables libres, ou encore plus simplement E, si la mise en évidence des variables libres n'est pas nécessaire.

Il est clair que les énoncés avec paramètres englobent ceux sans paramètres. On aurait pu construire directement les énoncés avec paramètres en prenant comme énoncés atomiques ceux de la forme : $x \in y$, $x \in a$, $a \in x$, $a \in b$, $x = y$, $x = a$, $a = x$, $a = b$, où x et y parcourent les variables et où a et b parcourent U. Les autres énoncés avec paramètres sont ensuite formés par application répétée des mêmes trois règles que pour les énoncés sans paramètres.

En règle générale, lorsqu'on emploie des lettres (ou des lettres indicées) différentes dans la notation d'un énoncé, cela signifie qu'elles désignent des variables (ou des paramètres) distinctes. L'exception est faite dans la définition des énoncés atomiques où a et b fonctionnent comme des variables et où x et y fonctionnent comme des variables représentant des variables.

La collection des énoncés (avec paramètres) est notée $\mathbf{E_1}(U, \in)$ ou simplement $\mathbf{E_1}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le schème considéré.

Un énoncé est dit *clos* s'il est sans variable libre. Un tel énoncé est soit vrai, soit faux. Par exemple si a , b , et c sont des ensembles, les énoncés $a \in b$ **ou** $a = c$, $\exists x\, (x \in b$ **ou** $x = c)$, $\exists y \forall x($ **non** $x \in y)$ sont clos. Les axiomes, les théorèmes, les lemmes etc. seront des énoncés clos. Nous retrouverons le troisième exemple ci-dessus sous le nom d'*axiome de l'ensemble vide*.

3) *Énoncés du second ordre*

Les énoncés définis précédemment sont dits du *premier ordre*. Ils constituent le *langage des ensembles* (du premier ordre), noté $\mathrm{L}_{\mathrm{ens}}$, sur lequel ZF repose. On peut constater que ces énoncés comportent un nombre fini (au sens intuitif) de symboles. En particulier, ils ont un nombre fini de variables libres ou de paramètres, du moins d'un point de vue *formel* car cette affirmation n'est pas tout à fait exacte lorsqu'on examine les choses d'un point de vue *sémantique*. En effet, si l'énoncé $\exists x\, (x \in a)$ par exemple comporte formellement exactement 5 symboles, les parenthèses non comprises, savoir $\exists$, x, x , $\in$ et a , il est cependant sémantiquement une disjonction éventuellement infinie d'énoncés. Par exemple, dans le schème (K, ε), si le paramètre a est par exemple l'entier 9, $\exists x\, (x\ \varepsilon\ 9)$, autrement dit l'énoncé « il existe un diviseur de 9 », s'écrit en réalité : $(1\ \varepsilon\ 9)$ **ou** $(2\ \varepsilon\ 9)$ **ou** $(3\ \varepsilon\ 9)$ **ou** $(4\ \varepsilon\ 9)$ **ou** … qui est effectivement une disjonction infinie (comportant par conséquent une infinité dénombrable de symboles). D'ailleurs, c'est potentiellement le cas dans tout énoncé comportant le quantificateur $\exists$. Cet exemple illustre au passage pourquoi dans les règles de formation des énoncés, le quantificateur $\exists$ rend muette la variable qui lui est rattachée. Ici, cette variable x , qui figure formellement dans $\exists x\, (x\ \varepsilon\ 9)$, "disparaît" dans $(1\ \varepsilon\ 9)$ **ou** $(2\ \varepsilon\ 9)$ **ou** $(3\ \varepsilon\ 9)$ **ou** $(4\ \varepsilon\ 9)$ **ou** … , ce qui montre qu'elle est mise pour parcourir en réalité tout l'univers K. De même le quantificateur universel $\forall$ cache une conjonction potentiellement infinie. Par exemple, $\forall x\, (x\ \varepsilon\ 9)$, autrement dit l'énoncé « tout entier non nul est un diviseur de 9 », s'écrit en réalité :
$(1\ \varepsilon\ 9)$ **et** $(2\ \varepsilon\ 9)$ **et** $(3\ \varepsilon\ 9)$ **et** $(4\ \varepsilon\ 9)$ **et** …

Nous allons étendre le langage du premier ordre en généralisant légèrement les conjonctions et disjonctions infinies qu'il comporte déjà potentiellement. Si on a une collection infinie dénombrable d'énoncés du premier ordre E_1 , E_2 , E_3 , … , pris dans cet ordre, ayant les *mêmes* variables libres x_1 , x_2 , … , x_n , la disjonction infinie E_1 **ou** E_2 **ou** E_3 **ou** … est un nouvel énoncé, aussi noté $\exists n\, E_n$, de même que la conjonction infinie
E_1 **et** E_2 **et** E_3 **et** …., aussi noté $\forall n\, E_n$

Dans ce cas la infinie a les mêmes variables libres x_1 , x_2 , … , x_n . Elle pourra être notée $E(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ et de ce point de vue aura les mêmes traitements que les énoncés du premier ordre à n variables libres x_1 , x_2 , … , x_n .

Si a_1 , a_2 , … , a_n sont n ensembles, la disjonction infinie (resp. la conjonction infinie) $E(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$ est un énoncé clos. Dans le cas de la disjonction, $E(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$ est vrai s'il existe un entier naturel i tel que l'énoncé $E_i(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$ soit vrai. Dans le cas de la conjonction, $E(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$ est vrai si pour tout entier naturel i, $E_i(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$ est vrai. Par définition,
l'énoncé **non** (E_1 **ou** E_2 **ou** E_3 **ou** …) est conjonction infinie (**non** E_1) **et** (**non** E_2) **et** (**non** E_3) **et** … et l'énoncé **non** (E_1 **et** E_2 **et** E_3 **et** …) est la disjonction infinie (**non** E_1) **ou** (**non** E_2) **ou** (**non** E_3) **ou** … .

On peut considérer que tout énoncé F du premier ordre est une disjonction (ou une conjonction) infinie
où chaque E_i est F.

On dit que la distribution des variables dans un énoncé est correcte si dans cet énoncé, toute variable liée à un quantificateur n'est liée à aucun autre et si elle est distincte de toute variable libre de l'énoncé. Les énoncés que nous considèrerons sont supposés de ce genre. Par exemple, la distribution des variables est correcte dans l'énoncé
$\exists u \exists v[u = x$ **et** $v = y$ **et** $u \in v$ **ou** $\exists z[x \in z$ **et** $\forall t(t \in z \Rightarrow t = y)]]$ ce qui n'est pas le cas de
$\exists u \exists v[u = x$ **et** $v = y$ **et** $u \in v$ **ou** $\exists u[x \in u$ **et** $\forall x(x \in u \Rightarrow x = y)]]$ qui comporte des ambiguïtés.

On appelle *arité* d'un énoncé E le nombre n de ses variables libres. On dit aussi que E est à n *arguments* ou est *n-aire*. L'arité d'un énoncé clos est donc 0. Un énoncé à une variable libre est *unaire* et un énoncé à deux variables libres est *binaire*. C'est de loin les cas les plus fréquents et les plus importants.
Étant donné un énoncé binaire $E(x, y)$, les énoncés $E(x, y)$ et $E(y, x)$ sont dits *réciproques*. On introduit alors un nouveau symbole E' et l'énoncé $E(y, x)$ est noté $E\,'(x, y)$.

Soit un énoncé $E(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ dans lequel la distribution des variables est correcte. Alors pour n variables distinctes y_1 , y_2 , … , y_n , une ou plusieurs d'entre elles peuvent avoir des occurrences muettes dans
$E(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$. Il est facile d'imaginer un procédé qui à $E(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ associe de manière unique un énoncé $E'(y_1 , y_2 , \ldots , y_n)$ obtenu à partir de $E(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ uniquement par changement de variables et dans lequel la distribution des variables est correcte. On dit alors que $E(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ et $E'(y_1 , y_2 , \ldots , y_n)$ sont des énoncés *clones*. $E'(y_1 , y_2 , \ldots , y_n)$ est alors aussi noté $E(y_1 , y_2 , \ldots , y_n)$. On dira par abus que
$E(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ et $E(y_1 , y_2 , \ldots , y_n)$ sont le même énoncé.

Soient $E(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ et $E'(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ deux énoncés ayant les mêmes variables libres. On dira que ces deux énoncés (en général non clos) sont *logiquement équivalents* pour signifier que pour tous ensembles
a_1 , a_2 , … , a_n , les énoncés clos $E(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$ et $E'(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$ sont logiquement équivalents, c'est-à-dire qu'on a : $E(a_1 , a_2 , \ldots , a_n) \Leftrightarrow E'(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$.

Soient deux énoncés *n*-aires E et E' n'ayant pas nécessairement les mêmes variables libres. On dit qu'ils sont logiquement équivalents (aux variables près) si pour tous ensembles a_1 , a_2 , … , a_n , on a :
$E(a_1 , a_2 , \ldots , a_n) \Leftrightarrow E'(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$.
Un cas particulier est celui où chacun de ces énoncés sont clones.

Tous les énoncés (du premier et du second ordre) ainsi définis sont appelés des $(U, \in)$-*énoncés*. C'est ce que signifiera désormais le terme "énoncé". La collection de ces énoncés est notée $\mathbf{E_2}(U, \in)$ ou simplement $\mathbf{E_2}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le schème considéré. Les énoncés égalitaires de U sont ceux de $\mathbf{E_2}$ ne comportant pas le symbole $\in$. Il est évident que ce sont les objets de $\mathbf{E_2}(U, =)$. Il est clair que ces énoncés sont communs à deux schèmes $(U, \in)$ et $(U, \in')$ ayant le même univers U.

b. Relations

1) Les **n**-*uplets*

Il est une notion intuitive de nature essentiellement *formelle* reposant sur l'ordre dicté par les entiers: la notion de *n-uplet*. Soit un entier non nul n ; avec les n premières variables $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ et les deux symboles de parenthèses "(" et ")", on forme l'assemblage $(\boldsymbol{u}_1)(\boldsymbol{u}_2)\ldots(\boldsymbol{u}_n)$, noté $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$. Plus généralement, l'assemblage $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où les x_i sont des variables des variables quelconques est un *n*-uplet de variables.
Soient n ensembles $a_1, a_2, \ldots, a_n$; un *n*-uplet (d'ensembles) est l'objet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ obtenu en remplaçant dans $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ chaque $\boldsymbol{u}_i$ par a_i. Le seul intérêt de cette notion est la propriété suivante: pour deux *n*-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ on a $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ si et seulement si pour tour tout indice i , on a $a_i = a'_i$.
Pour $n = 2, 3, 4$ etc., un *n*-uplet est respectivement appelé un *couple*, un *triplet*, un *quadruplet* etc., mais les couples constituent le cas particulier le plus important auquel la notion de *n*-uplet se ramène en définitive.
Comme on l'a déjà fait remarquer à propos des notions intuitives, on peut définir ou construire dans un modèle universel et de plus d'une façon des équivalents des *n*-uplets.

Soit un énoncé $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. On dit d'un *n*-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ qu'il vérifie cet énoncé si $E(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est vrai. On notera aussi $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in^* E$ et on dira que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *appartient* à E ou que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est un *élément* de E. La relation $\in^*$ est appelée la relation d'appartenance logique associée au schème $(U, \in)$.

2) Relations **n**-*aires*

Définition 1
Soit un énoncé *n*-aire $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. La collection (au sens intuitif) R des *n*-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ qui vérifient $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est appelée la *relation* à n *arguments* ou relation *n-aire* définie par $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. La relation R est aussi notée $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

La collection (au sens intuitif) des relations *n*-aires est notée $\mathbf{R_{2n}}$ (la collection de celles définies par des énoncés du premier ordre est $\mathbf{R_{1n}}$). La collection (au sens intuitif) de toutes les relations est notée $\mathbf{R_2}$ (la collection de toutes celles définies par des énoncés du premier ordre est $\mathbf{R_1}$). Bien entendues il faut comme pour les énoncés préciser le schème si nécessaire, par exemple $\mathbf{R_{2n}}(U, \in)$ ou $\mathbf{R_2}(U, \in)$.
Deux énoncés clones définissent des relations dites aussi *clones*. Par abus, on dira que des relations clones sont la même relation.

On dira « la relation R » ou « la relation $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ » selon que l'on juge nécessaire ou non de mettre en évidence les arguments.

Il en résulte le

Lemme
Deux énoncés $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $E'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ayant les mêmes variables libres définissent la même relation *n*-aire $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si et seulement si ces énoncés sont logiquement équivalents.

En effet, les *n*-uplets qui vérifient l'une sont exactement ceux qui vérifient l'autre.

Exemple
Les énoncés $x \in y$, $\textbf{non}\,(x \notin y)$, $x \in y$ **ou** $x \in y$, $x \in y$ **et** $x \in y$, $\textbf{non}(\textbf{non}\,(x \in y \textbf{ ou } x \in y))$, $\exists u \exists v(u = x \textbf{ et } v = y \textbf{ et } u \in v)$ $\forall u \forall v\,[(u = v \textbf{ ou } u \neq v) \textbf{ et } x \in y\,]$ définissent la même relation binaire $R(x, y)$.

Définition 2
Soient une relation *n*-aire $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et un énoncé $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui la définit. On dit qu'un *n*-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vérifie R ou que $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est vraie si et seulement si l'‘énoncé $E(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ l'est. On note alors comme pour les énoncés $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in^* R$ avec la même terminologie que pour les énoncés.

En fait, la relation *n*-aire R acquiert, par la définition de cette équivalence logique entre R et E , le statut d'un énoncé. Elle est assimilée à n'importe lequel des énoncés qui la définit.

Dans la pratique, on assimilera une relation n-aire $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec un des énoncés $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui la définit. On parlera donc par abus de langage de la relation $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$, et même de l'énoncé $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Par exemple, on parlera de la relation $x \in y$ pour sous-entendre la relation binaire $R(x, y)$ que cet énoncé définit et on assimilera d'ailleurs $\in$ et R.

Les relations d'importance capitale sont celles à *un* ou *deux* arguments. Une relation à un argument ou *unaire* $C(x)$ est appelée une *collection* et quelques fois une *propriété*. Elle est alors notée $x \in^* C$.
Une relation à deux arguments $R(x, y)$, par exemple la relation $x \in y$, est dite *binaire*. Une telle relation sera parfois notée $x R y$. C'est donc une collection (au sens intuitif) de couples.
Si $R(x, y)$ est une relation binaire, elle est définie par un énoncé $E(x, y)$. L'énoncé $E(y, x)$ définit alors la relation binaire $R(y, x)$ notée $R'(x, y)$; on dit alors que R' est la réciproque de R ou que les relations binaires R et R' sont *réciproques*. On a alors pour deux ensembles a et b, $R(a, b) \Leftrightarrow R'(b, a)$. Par exemple, la réciproque de $\in$ est $\ni$.

A partir de maintenant, nous ne pouvons plus utiliser les mots "collection" ou "relation binaire"dans leur sens intuitif sans le préciser.

Remarque importante:
Nous avons d'une part, la relation $\in$ avec son sens dans U, et d'autre part la relation $\in^*$ de signification purement *logique* (puisque signifiant "vérifie") donc complètement différente. Cependant, pour simplifier, la relation $\in^*$ sera par abus notée $\in$. Par conséquent, lorsque la relation $\in$ est employée avec les relations ou les collections, il ne faut pas perdre de vue qu'elle n'est pas à interpréter comme celle dans U. Nous verrons plus loin les conditions que le schème $(U, \in)$ doit remplir pour qu'on puisse (au moins sur U) assimiler $\in$ et $\in^*$. L'association de la terminologie de $\in$ à $\in^*$ et maintenant cet alignement de la notation des deux relations a pour but de mettre en évidence la théorie des ensembles qui réside potentiellement dans la logique et qui ne demande que quelques axiomes pour libérer toute sa puissance. En effet, il est assez remarquable la quantité de notions fondamentales accessibles (et d'autres sont encore à venir et pas des moindres) sur la simple base d'une collection U munie d'une relation binaire $\in$ qui peut être tout simplement la relation d'égalité $=$.

THÉORÈME 1
Deux relations n-aires $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $R'(x_1, x_2, \dots, x_n)$ logiquement équivalentes sont égales.

Ce qu'on écrit également : $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_2[(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R \Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R'] \Rightarrow R = R'$.

En effet, R et R' sont respectivement définies par des énoncés E et E'. Par définition, R et E sont logiquement équivalents, de même pour R' et E'. Comme R et R' sont logiquement équivalents, il en est de même pour E et E'. Or d'après le lemme précédent, E et E' définissent la même relation et donc $R = R'$.

Remarque
L'écriture précédente, même si elle utilise les symboles logiques ayant servi à bâtir les énoncés de $\mathbf{E_2}$, n'est pas un énoncé (de $\mathbf{E_2}$) à cause de la partie " $R = R'$ ", puisque R et R' ne sont, à priori, pas des ensembles, donc pas des paramètres. Toutefois, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R \Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R'$ est (par le biais d'une équivalence logique) un énoncé. Ce genre d'énoncé (au sens intuitif) qui sont des énoncés à ceci près que des relations y figurent comme si elles étaient des paramètres au sens du schème $(U, \in)$ sont appelés des *énoncés étendus*. Désormais, ils cohabiteront naturellement avec les énoncés de sorte qu'on ne fera plus de différence entre eux. Puis ils s'éclipseront peu à peu au profit des énoncés. On aura épisodiquement recours à eux mais alors ce sera pour formuler des définitions et des résultats dans toute leur généralité.

Une relation n-aire n'ayant aucun élément est dite *vide*. Il est clair que deux relation n-aires vides sont égales puisqu'elles sont logiquement équivalentes de façon triviale. Soit une relation n-aire $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$; On forme une nouvelle relation n-aire $x_1 \neq x_1$ **et** $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ayant les mêmes variables libres mais qui n'est vérifiée par aucun n-uplet, ce qui montre l'existence d'au moins une relation n-aire vide. Elle est alors unique et on la note $\varnothing$. On peut remarquer qu'on a la même relation vide $\varnothing$ pour tout entier n, puisqu'à chaque fois on a la même collection (au sens intuitif) vide.

3) Cas des collections

La collection (au sens intuitif) des collections est notée **C**. Le schème (**C**, $\in$*) est appelé l'*extension logique* de (U, $\in$).

i) Relation d'inclusion

Soient deux collections A et B. On dit que la collection A est *incluse* dans la collection B, ou que A est une *partie* (ou *sous-collection*) de B, et on écrit : $\boldsymbol{A \subset B}$**,** si l'énoncé suivant est vrai : $\forall x(\, x \in A \;\Rightarrow\; x \in B\,)$.
Si de plus $A \neq B$, alors on dit que A est *strictement inclus* dans B ou que A est une *partie stricte* de B . La réciproque de $\subset$ est notée $\supset$.

On définit de la même manière et dans les mêmes termes la relation d'inclusion dans l'univers U.
Dans U , $x \subset y$ est l'énoncé : $\forall z(\, z \in x \;\Rightarrow\; z \in y)$

On a tant pour les ensembles que pour les collections la propriété élémentaire suivante : si A , B et C sont des collections, si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.

Cette définition de l'inclusion est étendue au cas où a est un ensemble et A une collection; alors $a \subset A$ signifie $\forall x(\, x \in a \;\Rightarrow\; x \in A\,)$ et $A \subset a$ signifie $\forall x(\, x \in A \;\Rightarrow\; x \in a\,)$

Dans tous les cas, l'écriture $X \subset Y$ signifie que les éléments de X sont des éléments de Y .

ii) Égalité de deux collections

THÉORÈME 2
Deux collections A et B ayant les mêmes éléments sont égales.

Ce qu'on écrit également (énoncé étendu) : $\forall x(\, x \in A \;\Leftrightarrow\; x \in B\,) \quad\Rightarrow\quad A = B$

C'est une application directe du théorème précédent au cas particulier des collections. Ce théorème s'exprime avec la relation d'inclusion de la façon suivante :

Pour deux collections A et B , $A \subset B$ **et** $B \subset A \quad\Rightarrow\quad A = B$.

Ce théorème n'est pas encore vrai pour les ensembles. Il est assez remarquable que cette propriété soit vraie pour les collections associées au schème (U, $\in$) sans qu'il soit nécessaire que le moindre axiome soit imposé à ce schème. Les collections ont donc une longueur d'avance sur les ensembles, retard que ces derniers combleront à grands pas en temps voulu. Pour l'instant, on se contente de la définition suivante :

Définition 4
On dit que le schème (U, $\in$) satisfait l'*axiome d'extensionalité* ou est extensionnel ou encore que la relation $\in$ est *extensionnelle* dans U si deux ensembles a et b ayant les mêmes éléments sont égaux.

Dans U, c'est l'énoncé : $\forall x \forall y[\ \forall z\, (z \in x \;\Leftrightarrow\; z \in y) \;\Rightarrow\; x = y\,]$
qui s'écrit avec la relation d'inclusion : $\forall x \forall y(x \subset y$ **et** $y \subset x \;\Rightarrow\; x = y)$

Exemples
– Le schème (K, ε) est extensionnel car deux entiers non nuls a et b ayant les mêmes diviseurs sont égaux. Mais en munissant K de la relation $\in'$ ont le graphe est : $3 \in' 1$; $5 \in' 1$; $3 \in' 2$; $5 \in' 2$, on voit que $\in'$ n'est pas extensionnel, car 1 et 2 ont les mêmes éléments, 3 et 5, et pourtant sont distincts.
– Tout schème canonique est aussi extensionnel car tout ensemble a a pour seul élément lui-même. Par conséquent, deux ensembles a et b ayant les mêmes éléments sont égaux.

iii) Collections particulières

– La collection $x \neq x$ est vide, c'est donc la collection $\varnothing$.

Pour toute collection A, l'énoncé suivant est vrai : $\forall x(x \neq x \Rightarrow x \in A)$ ce qui montre que l'ensemble vide $\varnothing$ est inclus dans toute collection.

– A l'opposé de la collection vide, on a la collection $x = x$ est dite *universelle*, car on a $\forall x(x = x)$. Une collection A est dite universelle si on a $\forall x(x \in A)$. On vérifie comme précédemment qu'il n'existe qu'une seule collection universelle. On la note U^*. On a donc une collection U^* dont les éléments sont tous les objets de U. Elle est appelée la *réplique* de U et on la note U^*.

Pour toute collection A, l'énoncé suivant est vrai : $\forall x(x \in A \Rightarrow x = x)$ ce qui montre que toute collection est une partie de l'univers U.

– Soient n ensembles $a_1, a_2, \dots, a_n$. La collection $(x = a_1)$ **ou** $(x = a_2)$ **ou** … **ou** $(x = a_n)$ est notée $\{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$. En particulier, la collection $\{a\}$ est appelée *singleton* et la collection $\{ a , b\}$, est appelée une *paire* (au sens large). Si $a \neq b$, alors on a une paire *stricte*.

– Une collection A est dite *ensembliste* s'il existe un ensemble a tel que A et a aient les mêmes éléments, autrement dit tel que : $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in a)$

***iv) Répliques des ensembles dans* C**

Soient une collection A et un ensemble a. On dit que A est une *réplique* de a si A et a ont les mêmes éléments, ce qui se traduit par cet énoncé : $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in a)$. Cette réplique (si elle existe) est alors unique. En effet, soit une autre réplique A'. On a : $\forall x(x \in A' \Leftrightarrow x \in a)$ d'où $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in A')$, d'où $A = A'$ d'après le théorème précédent. On vérifié que l'énoncé $x \in a$ définit la réplique de a. On note cette réplique a^*. La collection (au sens intuitif) des répliques des ensembles est notée $\mathbf{C}_0$.

Lemme 1
Pour deux ensembles distincts a et b, $a^* = b^*$ revient à dire que a et b ont les mêmes éléments.

En effet, a^* et a ont par définition les mêmes éléments, de même que b^* et b. Par conséquent $a^* = b^*$ implique que a et b ont les mêmes éléments. A l'inverse si a et b ont les mêmes éléments, alors il en est de même pour $a^* = b^*$; donc ils sont égaux d'après le théorème précédent.

On peut remarquer que pour deux ensembles distincts a et b, on peut avoir $a^* = b^*$.

Par exemple, dans la collection K des entiers naturels non nuls, on définit la relation $\in'$ dont le graphe est $3 \in' 1$; $5 \in' 1$; $3 \in' 2$; $5 \in' 2$. On a donc $1^* = \{3, 5\}$; $2^* = \{3, 5\}$; $3^* = \varnothing$; $4^* = \varnothing$; $5^* = \varnothing$; etc.

Lemme 2
Dire que le schème $(U, \in)$ satisfait l'axiome d'extensionnalité revient à dire que pour deux ensembles a et b, $a^* = b^* \Rightarrow a = b$.

En effet, $a^* = b^*$ signifie que a et b ont les mêmes éléments donc sont égaux.

Si $(U, \in)$ est extensionnel, on a donc pour deux ensembles a et b, $a^* = b^* \Leftrightarrow a = b$, puisque la réciproque $a = b \Rightarrow a^* = b^*$ est toujours vraie, que $\in$ soit extensionnel ou non. On peut donc définir dans $\mathbf{C}_0$ la relation $\in$ (donc $\in^*$) de la façon suivante: pour deux ensembles a et b, $a^* \in b^* \Leftrightarrow a \in b$. La relation $\in$ est étendue dans $\mathbf{C}$ de la façon suivante: pour une collection A et pour un ensemble a, $a^* \in A \Leftrightarrow a \in A$.

THÉORÈME 3
Si le schème $(U, \in)$ satisfait l'axiome d'extensionnalité, alors $(\mathbf{C}_0, \in)$ est un sous-schème de $(\mathbf{C}, \in)$ et $(U, \in)$ est isomorphe à $(\mathbf{C}_0, \in)$.

Cela signifie concrètement que si $(U, \in)$ est extensionnel, alors l'extension logique $(\mathbf{C}, \in)$ prolonge $(U, \in)$ et de plus U est un élément de $\mathbf{C}$. C'est ce qui justifie à posteriori que soit appelé l'extension logique de $(U, \in)$. Par conséquent cette appellation ne prend vraiment tout son sens que si $(U, \in)$ est extensionnel. Les objets de U ont alors répliques dans C; on confond ainsi un ensemble a et sa réplique a^* et on peut donc poser $a^* = a$, ce qui signifie qu'on confond $\mathbf{C}_0$ et U, donc $\mathbf{C}_0 = U$. La collection U est représentée dans $\mathbf{C}$ par U^* ; donc on a aussi

$U^* = U$, donc $U^* = U = \mathbf{C}_0$. La relation $\in$ prend donc son sens habituel dans U mais le sens logique $\in^*$ dans tous les autres cas de figure.

Ce résultat est très important car il montre que l'axiome d'extensionalité dans le schème $(U, \in)$ a pour conséquence que deux notions au départ très différentes, les ensembles et les collections, commencent à se rejoindre, la seconde généralisant alors la première. Mais, revenons à notre schème $(U, \in)$, où l'axiome d'extensionalité n'est pas encore supposé, afin d'établir d'autres résultats généraux (c'est-à-dire logiques).

2. Procédés de formation de collections

Comme cela arrive souvent en mathématiques, des notions semblant identiques nécessitent de subtiles distinguos alors que d'autres apparemment différentes ne sont en réalité que des points de vue différents d'une même notion. C'est le cas de la notion de *famille* assez fréquemment utilisée.

a. Notion de famille de collections

Une relation binaire $C(x, y)$ est aussi appelée une *famille* de collections. Cette appellation se justifie par le fait suivant: pour tout ensemble donné b, on a la collection $C(x, b)$ dépendant de b et que l'on peut noter $x \in C_b$. L'écriture $x \in C_y$ devient alors équivalente à $C(x, y)$. On appelle une *famille indexée* la donnée d'une famille C et d'une collection I. Plus précisément la famille indexée est la relation binaire $y \in I$ **et** $x \in C_y$ qui n'est rien d'autre qu'une nouvelle famille $C'(x, y)$. La collection I est appelée la collection des indices de la famille indexée. Les éléments de I sont appelés *indices*. La famille C est appelée la famille de base de la famille indexée C' . La variable i étant parmi celles couramment utilisées pour parcourir des indices, la famille indexée précédente peut encore s'écrire $i \in I$ **et** $x \in C_i$. Mais s'agissant de famille indexée, on utilisera une nouvelle notation $\boldsymbol{(C_i)_{i\in I}}$. Avec la même famille de base C , en considérant une autre collection d'indices J, on obtient une autre famille indexée $(C_j)_{j\in J}$.

La famille $(C_i)_{i\in I}$ est vide si $I = \varnothing$. Cette famille est donc la collection vide $\varnothing$.

On dit qu'une famille $(A_i)_{i\in I}$ est *ensembliste* si les A_i le sont. En particulier, si le schème $(U, \in)$ est extensionnel, alors on dit que c'est une famille d'*ensembles*. Dans ce cas, on a la collection $\exists i(\, i\in I$ **et** $x = A_i\,)$ puisque les A_i sont des ensembles. Cette collection est appelée la *collection image* de la famille et est notée $\boldsymbol{\{\, A_i\,;\ \ i\in I\,\}}$ ou encore $\boldsymbol{\{A_i\}_{i\in I}}$.

b. Réunion d'une famille de collections. Axiome de la réunion pour les ensembles

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de collections indexées par une collection I. La collection $\exists i(\, i\in I$ **et** $x \in A_i\,)$, est appelée la réunion de cette famille et est notée $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$. C'est la collection obtenue en rassemblant tous les éléments de tous les A_i .

En particulier, la réunion d'une famille vide est vide. En effet, la collection $\exists i(i\in\varnothing$ **et** $x\in A_i)$ est vide.

Soit une collection B . On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un *recouvrement* de B si $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = B$. Toute famille est donc un recouvrement de sa réunion.

1) Réunion de deux collections.

Pour deux collections A et B , la collection $x \in A$ **ou** $x \in B$ appelée la *réunion* de A et B et notée $\boldsymbol{A \cup B}$, lire « A union B ». On a aussi le cas $x \in a$ **ou** $x \in A$ où a est un ensemble et le cas $x \in a$ ou $x \in b$ où a et b sont des ensembles. Dans tous les cas X **ou** Y est noté $X \cup Y$.

Il est clair que $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$. En outre, on a les propriétés élémentaires suivantes :

- $\varnothing \cup A = A$
- $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$.
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \subset A \cup B$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \subset C$ **et** $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$

2) *Réunion (intérieure) d'une collection*

Soit une collection A. On a la famille $i \in A$ **et** $x \in i$, qui est la famille identité indexée par A, c'est-à-dire $(i)_{i\in A}$. Sa réunion est $\exists i(i \in A$ **et** $x \in i)$, soit $\bigcup_{i\in A} i$. Elle est appelée la *réunion (intérieure)* de A et également notée **réu(*A*)**. C'est la collection des éléments des éléments de A.
On dit aussi que A est un recouvrement de réu(A).

Soient a et b deux ensembles réu($\{a, b\}$) est $a \cup b$.

c. Intersection d'une famille de collections

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de collections indexées par une collection I. La collection $\forall i(i\in I \Rightarrow x \in A_i)$, est appelée l'intersection de cette famille et est notée $\bigcap_{i\in I} A_i$. C'est la collection des éléments communs à tous les A_i.
En particulier, l'intersection d'une famille vide est l'univers U^* tout entier. En effet, tout ensemble est élément de la collection $\forall i(i\in\varnothing \Rightarrow x\in A_i)$

1) *Intersection de deux collections.*

Pour deux collections A et B, la collection $x \in A$ **et** $x \in B$ appelée *l'intersection* de A et B et notée **$A \cap B$**, lire « A inter B ». C'est évidemment la collection des éléments communs à A et à B. On a comme pour la réunion les cas avec les ensembles.

Mais il arrive souvent que l'intersection de deux collections soit vue sous un angle asymétrique. On a une collection donnée A et une *propriété* P qui n'est rien d'autre qu'une autre collection. On est alors amené à nous intéresser à la partie des éléments de A vérifiant la propriété P. Cette partie, qui est $A \cap P$, est alors notée $x \in A$ **et** $P(x)$ et aussi **$\{ x \in A \ ; \ P(x) \}$** dite notation ou définition en *compréhension*.

Il est clair que $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$. En outre, on a les propriétés élémentaires suivantes :

- $\varnothing \cap A = \varnothing$
- $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$.
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \subset C$ **et** $B \subset C \Rightarrow A \cap B \subset C$

Deux collections A et B sont dites *disjointes* si $A \cap B = \varnothing$, c'est-à-dire si elles n'ont aucun élément commun.
Soit $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'une collection B. On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est une *partition* de B, si pour deux éléments i et j de I, $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$. Autrement dit, les A_i sont deux à deux disjoints.
La partition est dite *stricte* si de plus les A_i sont tous non vides. Soit une collection dont les éléments sont deux à deux disjoints. Une telle collection est aussi appelée une partition. Elle est stricte si ses éléments sont non vides.

2) *Intersection (intérieure) d'une collection*

Soit une collection A . On a la famille $i \in A$ **et** $x \in i$, qui est la famille identité indexée par A, c'est-à-dire $(i)_{i\in A}$. Son intersection est $\forall i(\ i \in A \ \Rightarrow\ x \in i)$, soit $\bigcap\limits_{i\in A} i$. Elle est appelée *l'intersection (intérieure)* de A et également notée **inter(*A*)**. C'est la collection des éléments communs aux éléments de A.

d. Formation d'une nouvelle collection par différence (ou troncation)

Soient deux collections *A* et *B*. $A(x)$ **et non** $B(x)$ est une nouvelle collection appelée la *différence de A et B* (ou *collection A tronquée de B*). On la note ***A – B***. Si en particulier *B* est une partie de *A* , alors $A - B$ est appelé le *complémentaire de B dans A.*

Lemme 2
Si *A* est une collection et *X* une partie de *A* , on a : $A - (A - X) = X$.

Soit $x\in A$. On a : $x \in A - (A - X) \iff x \in A$ **et non** $[x \in (A - X)]$
$\iff x \in A$ **et non** $[x \in A$ **et non** $(x \in X)] \iff x \in A$ **et** $(x \notin A$ **ou** $x \in X)$
$\iff (x \in A$ **et** $x \notin A)$ **ou** $(x \in A$ **et** $x \in X) \iff (x \in A$ **et** $x \in X) \iff x \in X$. CQFD.

Lemme 3
Soient une collection *A* et *X* et *Y* deux parties de *A*. On a : $X \subset Y \iff A - Y \subset A - X$.

Si $X \subset Y$ alors $(x \in X \Rightarrow x \in Y)$ donc $(x \notin Y \Rightarrow x \notin X)$. Donc si $x \in (A - Y)$ alors $x \in A$ **et** $x \notin Y$ donc $x \in A$ **et** $x \notin X$ donc $x \in (A - X)$ d'où $A–Y \subset A–X$.
Réciproquement, si $A–Y \subset A–X$ alors $[x \in (A–Y) \Rightarrow x \in (A–X)]$ donc
$[x \in A$ **et** $x \notin Y \Rightarrow x \in A$ **et** $x \notin X]$ donc $[$**non** $(x \in A$ **et** $x \notin X) \Rightarrow$ **non** $(x \in A$ **et** $x \notin Y)]$ donc $(x \notin A$ **ou** $x \in X \Rightarrow x \notin A$ **ou** $x \in Y)$. Et comme $x \in X \Rightarrow x \in A$, on a donc $x \in X \Rightarrow x \in Y$, d'où $X \subset Y$. CQFD.

3. Relations d'équivalence et d'ordre

a. Définitions

Soient est une relation binaire $R(x, y)$ et une collection A :
– On dit que R est *réflexive* sur A si pour tout élément a de A , on a $R(a, a)$
– On dit que R est *symétrique* sur A si pour tous éléments a et b de A , on a $R(a, b) \Rightarrow R(b, a)$
– On dit que R est *antisymétrique* sur A si pour tous éléments a et b de A , on a
$R(a, b)$ **et** $R(b, a) \Rightarrow a = b$
– On dit que R est *transitive* sur A si pour tous éléments a , b et c de A , on a
$R(a, b)$ **et** $R(b, c) \Rightarrow R(a, c)$

Le lemme suivant est évident :

Lemme
Soit B une partie de *A* ; alors si R est réflexive (resp. symétrique) (resp. antisymétrique) (resp. transitive) sur *A*, alors R est réflexive (resp. symétrique) (resp. antisymétrique) (resp. transitive) sur *B* .

Cela découle immédiatement de ce que les éléments de B sont des éléments particuliers de *A*. En effet, si on a $R(a, a)$ pour tout élément a de A, il en est de même pour tout élément a' de B qui est élément particulier de A . Et si pour tous éléments a et b de A , on a $R(a, b) \Rightarrow R(b, a)$, alors il en est de même pour tous éléments a' et b' de B qui sont des éléments particuliers de *A*. Raisonnement analogue au sujet de l'antisymétrie et de la transitivité.

b. Relation d’équivalence

Une relation binaire $R(x, y)$ est une relation d’*équivalence* sur une collection A si sur cette collection elle est réflexive, symétrique et transitive. Pour tout élément a de A , la collection $x \in A$ **et** $R(x, a)$ est appelée la *classe d’équivalence* de a (dans A).
$R(a, b)$ est souvent noté $a \sim b$ (mod. R) , $a \equiv b$ (mod. R) , $a \sim_R b$ ou encore $a \equiv_R b$, et dans les contextes où aucune ambiguïté n’est à craindre , simplement $a \sim b$ ou $a \equiv b$.

c. Relation d’ordre

1) Relation d’ordre (au sens large)

Une relation binaire $R(x, y)$ est une relation d’*ordre* (*au sens large*) sur une collection A si sur cette collection elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

La relation R est dite d’ordre *total* sur A si pour tous éléments a et b de A , on a $R(a, b)$ ou $R(b, a)$.
$R(a, b)$ est souvent noté $a \leq b$ (mod. R) , ou encore $a \leq_R b$, et dans les contextes où aucune ambiguïté n’est à craindre, simplement $a \leq b$. La réciproque de $\leq$ sera notée $\geq$. . La relation
$x \leq y$ **et** $x \neq y$ sera notée $x < y$.

2) Relation d’ordre (au sens strict)

Une relation binaire $R(x, y)$ est une relation d’*ordre* (*au sens strict*) sur une collection A si :
– pour tous éléments a et b de A , on a $R(a, b) \Rightarrow$ **non** $R(b, a)$
– R est transitive sur A.
La relation R est dite d’ordre strict *total* sur A si pour tous éléments a et b de A , on a $R(a, b)$ ou $R(b, a)$ ou $a = b$.

On vérifie aisément que

Lemme 1
Si $R(x, y)$ est une relation d’ordre (au sens large) sur une collection A, alors la relation $R(x, y)$ **et** $x \neq y$ est une relation d’ordre (au sens strict) sur A . Réciproquement, si $R(x, y)$ est une relation d’ordre (au sens strict) sur une collection A, alors la relation $R(x, y)$ **ou** $x = y$ est une relation d’ordre (au sens large) sur A .

Lemme 2
Si R est une relation d’équivalence (resp. d’ordre au sens large, d’ordre au sens strict) sur une collection A, alors R est une relation d’équivalence (resp. d’ordre au sens large, d’ordre au sens strict) sur toute partie B de A.

Cela découle immédiatement du lemme 1. Mais par « la relation R sur B » , on entendra plutôt la relation R' définie par $x \in B$ **et** $y \in B$ **et** $R(x, y)$ dite *induite* par R sur B.

Le résultat suivant est aussi facile à vérifier :

Lemme 3
Si R est une relation d’équivalence (resp. d’ordre au sens large, d’ordre au sens strict) sur une collection A, alors sa réciproque R' est aussi une relation d’équivalence (resp. d’ordre au sens large, d’ordre au sens strict) sur A.

3) Terminologie des collections ordonnées

Lorsqu’on parlera de relation d’ordre sans autre précision, cela sous-entendra une relation d’ordre au sens large. Si cette relation est notée $\leq$, elle se lira « inférieur à » et sa réciproque sera notée $\geq$ et se lira « supérieur à » . La relation stricte associée sera notée $<$ « strictement inférieur à » et sa réciproque $>$ « strictement supérieur à».

Une *collection ordonnée*, notée $(A , \leq)$, est la donnée d'une collection A et d'une relation d'ordre $\leq$ sur A. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la relation $\leq$, on parlera de la collection ordonnée A.

On rappelle ici quelques définitions classiques relatives aux collections ordonnées.

On dit que a est le *plus petit élément* (resp. le *plus grand élément*) de A, si tout élément de A distinct de a est strictement supérieur (resp. strictement inférieur) à a. Il est clair qu'un tel élément (s'il existe) est unique.
Le plus petit élément (resp. le plus grand élément) de A est aussi appelé le *minimum* (resp. le *maximum*) de A.

On dit que a est *un élément minimal* (resp. *maximal*) de A, s'il n'existe aucun élément de A strictement inférieur (resp. strictement supérieur) à a. On peut remarquer qu'un tel élément (s'il existe) n'est pas nécessairement unique. Cette notion ne doit pas être confondue avec celle de minimum (resp. le maximum).

Soit B une partie de A. On dit que B est *minorée* (resp. *majorée*) s'il existe un élément a de A tel que pour tout $x\in B$, $x \geq a$ (resp. $x \leq a$). On dit que a est un *minorant* (resp. *majorant*) de B. On dit que B est *bornée* si elle est minorée et majorée. On dit que a est la *borne inférieure* (resp. *supérieure*) de B si a est le plus grand des minorants (le plus petit des majorants) de B.

4. Relations fonctionnelles

Soit une relation n+1- aire $F(x_1 , x_2 , \ldots , x_n , y)$. On dit qu'elle est *fonctionnelle* (à n arguments) par rapport *à* y si l'énoncé suivant est vrai :
$\forall x_1\forall x_2 \ldots \forall x_n \forall y\forall y'[F(x_1 , x_2 , \ldots , x_n , y)$ **et** $F(x_1 , x_2 , \ldots , x_n , y') \Rightarrow y = y']$

La relation n-aire $\exists y\, F(x_1 , x_2 , \ldots , x_n , y)$ est appelée le *domaine* de F et est notée **Dom *F***, et la collection $\exists x_1\exists x_2 \ldots \exists x_n\, F(x_1 , x_2 , \ldots , x_n , y)$ est appelée l'*image* de F et est notée **Im *F***.
Soient $(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$ est un n-uplet vérifiant la relation n-aire Dom F. Par définition de la relation fonctionnelle, il existe un élément b et un seul de Im F tel qu'on ait $F(a_1 , a_2 , \ldots , a_n , b)$.
On note alors $b = F(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$ et l'écriture $y = F(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ devient alors équivalente à $F(x_1 , x_2 , \ldots , x_n , y)$.

a. Fonctions

1) Définitions

On appelle *fonction* une relation $F(x, y)$ *fonctionnelle* (à un argument) par rapport *à* y. L'énoncé suivant est alors vrai : $\forall x\forall y\forall y'[F(x, y)$ **et** $F(x, y') \Rightarrow y = y']$
La relation fonctionnelle $F(x, y)$ est alors notée $y = F(x)$.

Le domaine de F, **Dom *F*** , est donc la collection $\boldsymbol{\exists y(y = F(x))}$ et l'image de F , **Im *F*** , est la collection $\boldsymbol{\exists x(y = F(x))}$. Soit a un élément de Dom F. L'élément b de Im F tel que $b = F(a)$ est appelé l'*image* (*individuelle*) de a par F et a est appelé un *antécédent* de b par F.

Soient deux collections A et B et une fonction F; on dit que F est une *fonction de* A *dans* B , ou que F est une *fonction de* A *à valeurs dans* B, si Dom $F \subset A$ et Im $F \subset B$. Si Dom $F = A$, alors la fonction est appelée une *application*. En particulier, si $A = B$, alors on dit que F est une *fonction dans* A.

Il est clair que si F est une fonction de A dans B , alors F est une application de Dom F dans B. Par conséquent, dire que F est une fonction de A dans B revient à dire que F est une application d'une partie de A dans B.

Exemples de fonctions et d'applications

Fonction vide

La relation binaire vide $F = \varnothing$, par exemple dont une définition est $x\in\varnothing$ **et** $y\in\varnothing$, ou encore $x = y$ **et** $x \neq y$, est une relation fonctionnelle triviale. C'est la fonction ou famille vide.

Étant donnée une fonction F, les énoncés suivants sont évidemment équivalents :

– $F = \varnothing$
– $\mathrm{Dom}\, F = \varnothing$.
– $\mathrm{Im}\, F = \varnothing$.

Il en découle immédiatement que :

– pour toute collection quelconque B, $\varnothing$ est une application de $\varnothing$ dans B et c'est la seule.

  En effet, $\mathrm{Dom}\,\varnothing = \varnothing$ et $\mathrm{Im}\,\varnothing = \varnothing \subset B$. Et si F est une autre application de $\varnothing$ dans B, alors $\mathrm{Dom}\, F = \varnothing$ et par conséquent $F = \varnothing$.

  On en déduit que pour deux collections quelconques A et B, il existe une *fonction* de A dans B. En effet, $\varnothing$ est une application de $\varnothing \subset A$ dans B ; c'est donc par définition une fonction de A dans B.

– pour une collection A, il existe application de A dans $\varnothing$ si et seulement si $A = \varnothing$.

  En effet, s'il existe application F de A dans $\varnothing$, alors on a forcément $\mathrm{Im}\, F = \varnothing$ et par conséquent $A = \mathrm{Dom}\, F = \varnothing$. Réciproquement, si $A = \varnothing$ alors $\varnothing$ est une application (la seule) de A dans $\varnothing$.

  On en déduit qu'il n'existe aucune application d'une collection *non vide* A dans une collection *vide* B.

– s'il existe une application F d'une collection *non vide* A dans une collection B, alors F est non vide; dans ce cas, B est aussi forcément non vide.

  En effet, si $F = \varnothing$, alors on a $A = \mathrm{Dom}\, F = \varnothing$, ce qui est une contradiction ; donc $F \neq \varnothing$. Par conséquent $\mathrm{Im}\, F \neq \varnothing$, ce qui montre que $B \supset \mathrm{Im}\, F$ est non vide.

Application constante sur une collection A.

La relation $x \in A$ **et** $y = b$, où A est une collection et b un ensemble, est fonctionnelle. Notons-la $y = F(x)$. C'est une application *constante* sur A. Pour tout ensemble x de A, on a: $F(x) = b$. On a : $\mathrm{Dom}\, F = A$ et $\mathrm{Im}\, F = \{b\}$

On en déduit que si A et B sont des collections *non vides* quelconques, alors il existe une application de A dans B. Il suffit pour cela de considérer par exemple la fonction F définie par la relation $x \in A$ **et** $y = b$, pour un $b \in B$. On voit que F est non vide car A étant non vide, il existe un $a \in A$; le couple (a, b) est alors un élément de F. On a vu plus haut que toute application de A dans B est non vide.

Application identité dans une collection A.

Pour toute collection A, la relation $x \in A$ **et** $y = x$ est fonctionnelle. On la note $\mathbf{y = Id_A(x)}$. C'est l'application *identité* dans A. Pour tout élément x de A, on a : $\mathrm{Id}_A(x) = x$. Tout élément de A est donc sa propre image et son propre antécédent par Id_A. On a $\mathbf{Dom\,(Id_A) = Im\,(Id_A) = A}$. (En pratique, pour une collection donnée A, lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion, on dira souvent application identité Id pour signifier en réalité Id_A).
En particulier, si $A = U^*$, $\mathbf{Id}_A$ est simplement noté **Id**. Et si $A = \varnothing$, alors comme $\mathrm{Dom}\,(\mathrm{Id}_A) = \varnothing$, alors on a $\mathrm{Id}_A = \varnothing$.

2) Restriction d'une fonction à une collection

Si F est une fonction et A une collection, alors la relation : $x \in A$ **et** $y = F(x)$ est aussi fonctionnelle qu'on notera : $y = F'(x)$. F' est noté $\boldsymbol{F|A}$ est appelée *restriction* de F à A .

En effet, soient des ensembles a, b et b'. On suppose que :
$[a \in A$ **et** $b = F(a)]$ **et** $[a \in A$ **et** $b' = F(a)]$. Il en découle immédiatement que $b = b'$.

Il s'agit de "restriction" au sens large. On aurait une restriction au sens strict si on impose à A d'être un partie de Dom F. Ainsi par exemple, $\mathbf{Id}_{A} = \mathbf{Id}|A$ est une restriction au sens strict de **Id** à A.

La collection $\exists x(x \in A$ **et** $y = F(x))$, qui est $\mathbf{Im}\,(F\,|\,A\,)$, est appelé *image* (*globale*) *de* A *par* F, ou par abus de langage, *image de* A *par* F. On la note $\boldsymbol{F< A>}$. C'est la collection des images (individuelles) par F des éléments de A. On la note aussi $\{\, \boldsymbol{F(x)}\ ;\ \boldsymbol{x \in A} \,\}$, ou $\{\, \boldsymbol{F(x)} \,\}_{\mathbf{x\in A}}$, ou encore $\{\, \boldsymbol{F_x} \,\}_{\boldsymbol{x\in A}}$.

Les résultats suivants sont faciles à vérifier :
- $\boldsymbol{F < \varnothing >\ =\ \varnothing}$
- $\boldsymbol{F} < \mathbf{Dom}\, \boldsymbol{F} > \ =\ \{\, \boldsymbol{F(x)}\ ;\ \boldsymbol{x \in} \mathbf{Dom}\, \boldsymbol{F} \,\} \ =\ \mathbf{Im}\, \boldsymbol{F}$

D'après la définition générale donnée à la notion de famille de collections, la relation $x \in A$ **et** $y = F(x)$ est une famille indexée par A, et c'est la famille $\boldsymbol{(F(x))_{x\in A}}$. On dit ici aussi que c'est une famille d'ensembles, c'est donc par définition la collection (au sens intuitif) des couples $\{\, (x, F(x))\ ;\ x\in A \,\}$. La collection image de cette famille n'est rien d'autre que $\mathrm{Im}\,(F\,|\,A\,) \ =\ F< A > \ =\ \{\, F(x)\ ;\ x\in A \,\}$. On remarque qu'avec une relation fonctionnelle, on a une famille d'ensembles sans forcément que le schème $(U, \in)$ soit extensionnel.

Lemme 1
Pour toute fonction F et pour toute collection A, si Dom $F \subset A$, alors $F|A = F$

Il faut montrer qu'on a pour tous ensembles x et y, $x \in A$ **et** $y = F(x) \Leftrightarrow y = F(x)$. On a évidemment $x \in A$ **et** $y = F(x) \Rightarrow y = F(x)$. A l'inverse si $y = F(x)$, alors $x \in$ Dom F, et comme Dom $F \subset A$, on a donc $x \in A$, $x \in A$ **et** $y = F(x)$ est vrai. CQFD.

En particulier, $\boldsymbol{F}|\mathbf{Dom}\,\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}$

Lemme 2
Soit une fonction F et deux collections A et B . $(F|A)|B$ est simplement noté $F|A|B$.
On a $\boldsymbol{F|A|B} = \boldsymbol{F|(A \cap B)}$ et $\boldsymbol{F|A|B = F|B|A}$.

En effet, $F|A|B$ est la fonction $x \in B$ **et** $(\, x \in A$ **et** $y = F(x)\,)$, soit $x \in A \cap B$ **et** $y = F(x)$, donc $F|A|B = F|(A \cap B)$. Et comme $A \cap B = B \cap A$, on a donc $F|A|B = F|B|A$.

En particuliers, si $A \subset B$, alors $F|A|B = F|A$, d'où $F|A|A = F|A$.

Lemme 3
Pour toute fonction F et pour toute collection A , on a :
- $\boldsymbol{F|A} = \boldsymbol{F}|(\boldsymbol{A} \cap \mathbf{Dom}\, \boldsymbol{F})$
- $\mathbf{Dom}\,(\boldsymbol{F|A}) = \boldsymbol{A} \cap \mathbf{Dom}\, \boldsymbol{F}$
- $\mathbf{Im}\,(\boldsymbol{F\,|\,A}) = \boldsymbol{F< A>} = \boldsymbol{F}< \boldsymbol{A} \cap \mathbf{Dom}\ \boldsymbol{F} >$

En effet ,
- Comme $F|\mathrm{Dom}\, F = F$, on a donc $F|(A \cap \mathrm{Dom}\, F\,) = F|A|\ \mathrm{Dom}\, F = F|\ \mathrm{Dom}\, F\ |A = F|A$
- Dom $(F|A)$ est la collection : $\exists y\, [x \in A$ **et** $y = F(x)]$, soit $x \in A$ **et** $\exists y\, [y = F(x)]$ c'est-à-dire $A \cap \mathrm{Dom}\, F$.
- Im $(F|A) = F< A >$ (par définition) et $\mathrm{Im}\,(F|(A \cap \mathrm{Dom}\, F\,) = F< A \cap \mathrm{Dom}\, F >$ (par définition)
  Et comme $F|A = F|(A \cap \mathrm{Dom}\, F\,)$, on a donc $\mathrm{Im}\,(F\,|\,A\,) = F< A > = F< A \cap \mathrm{Dom}\ F >$. CQFD.

On en déduit que $\boldsymbol{(F(x))_{x\in A}} = \boldsymbol{(F(x))_{x\in A \cap \mathbf{Dom}\, F}}$; on voit donc qu'en particulier, si $A \cap \mathrm{Dom}\, F = \varnothing$, alors la famille (ou l'application) $(F(x))_{x\in A}$ est vide, c'est-à-dire $F|A = \varnothing$.

En particulier, F est la famille $(F(x))_{x \in \mathrm{Dom}\, F}$ indexée par Dom F ; la collection image de cette famille est $\mathrm{Im}\, F = \{\, F(x)\ ;\ x\in \mathrm{Dom}\, F \,\}$.

Lemme 4
Soit une fonction F et deux collections A et B . On a $\boldsymbol{F< A \cup B > = F< A > \cup F< B >}$

En effet, $F< A \cup B >$ est la collection $\exists x\,(x \in A \cup B$ **et** $y = F(x)\,)$, soit $\exists x[\,(x \in A$ **ou** $x \in B)$ **et** $y = F(x)\,]$, soit $\exists x[\,(x \in A$ **et** $y = F(x)\,)$ **ou** $(\,x \in B$ **et** $y = F(x)\,)\,]$, soit $\exists x(x \in A$ **et** $y = F(x))$ **ou** $\exists x(x \in B$ **et** $y = F(x))$, soit $x \in F< A >$ **ou** $x \in F< B >$, soit $x \in F< A > \cup F< B >$. CQFD.

On en déduit que :

- $\boldsymbol{A \subset B \Rightarrow F< A > \subset F < B >}$.

Lemme 5

Pour toute fonction F et pour toute collection A, si $A \subset \mathrm{Dom}\,F$, alors $\mathrm{Dom}\,(F|A) = A$, et $F < A > \subset \mathrm{Im}\,F$. Et a pour tout $x \in A$, $(F|A)(x) = F(x)$.

En effet, $\mathrm{Dom}\,(F|A) = A \cap \mathrm{Dom}\,F = A$. Comme $A \subset \mathrm{Dom}\,F$, on a donc $F<A> \subset F<\mathrm{Dom}\,F> = \mathrm{Im}\,F$. Par définition de $F|A$, $y = (F|A)(x)$ est la relation $x \in A$ **et** $y = F(x)$. Alors pour tout $x \in A$, comme $A \subset \mathrm{Dom}\,F$, on a donc $x \in \mathrm{Dom}\,F$, donc il existe $y \in \mathrm{Im}\,F$ tel que $y = F(x)$. L'énoncé $x \in A$ **et** $y = F(x)$ est alors vrai et par conséquent on a $y = (F|A)(x)$, d'où $(F|A)(x) = F(x)$. CQFD.

On déduit aisément que si F et G sont deux fonctions et A une collection telle que $A \subset \mathrm{Dom}\,F \cap \mathrm{Dom}\,G$, alors on a : $\forall x[\,x \in A \Rightarrow F(x) = G(x)\,] \Leftrightarrow F|A = G|A$.

3) Composition de deux fonctions

Soient F et G deux fonctions. La relation : $\exists y\,[\,y = F(x)$ **et** $z = G(y)]$ est fonctionnelle par rapport à z. On la note $\boldsymbol{z = (G \circ F)\,(x)}$. La fonction $H = G \circ F$ est appelée la *composée* de F et G.

b. Propriétés des applications : applications injectives, surjectives, bijectives

Soient deux collections A et B et F une application (au sens large indiqué ci-dessus) de A dans B. On dit que F est une *injection* de A dans B (ou est *injective*) si pour tous éléments a et a' de A, on a :
$F(a) = F(a') \Rightarrow a = a'$.
On dit que A est *injectable* dans B, et on écrit A **inj** B, s'il existe une injection de A dans B. En particulier, toute partie A d'une collection B est injectable dans B. En effet, la restriction de Id_B à A est injection de A dans B, qu'on appelle injection *canonique* de A dans B.

On dit que F est une *surjection* de A sur B (ou est *surjective*) si $F< A > = B$. On écrira A **surj** B pour signifier qu'il existe une surjection de A sur B.

On dit que F est une *bijection* de A sur B (ou est *bijective*) si elle est injective et surjective. Les collections A et B sont alors dites *équipotentes*, et on écrit A **éqp** B.

On établit alors aisément les propriétés classiques suivantes :

- A inj B **et** B inj $C \Rightarrow A$ inj C
- A surj B **et** B surj $C \Rightarrow A$ surj C d'où
- A éqp B **et** B éqp $C \Rightarrow A$ éqp C

Si F est une bijection de A sur B, alors la réciproque de la relation $y = F(x)$ est aussi une relation fonctionnelle bijective notée $y = F^{-1}(x)$. On dit alors que F et F^{-1} sont des bijections réciproques. On a $y = F(x) \Leftrightarrow x = F^{-1}(y)$. De même, on vérifie très aisément que si X est une partie de A et Y une partie de B, on a : $Y = F< X > \Leftrightarrow X = F^{-1} < Y >$. En particulier, comme $\mathrm{Im}\,F = F< \mathrm{Dom}\,F >$, on a donc $\mathrm{Dom}\,F = F^{-1} < \mathrm{Im}\,F >$.

Sur toute collection A, Id_A est une bijection. Si F est une bijection de A sur B, on a :
$\boldsymbol{F^{-1} \circ F = \mathrm{Id}_A}$ et $\boldsymbol{F \circ F^{-1} = \mathrm{Id}_B}$.

III - Les ordinaux et les cardinaux

1. Collections inductives et collections transitives

a. Collections inductives

Une collection A est dite *inductive* si $\varnothing \in A$ et si pour tout élément a de A, $a \cup \{a\} \in A$.

L'univers $\mathcal{U}$ est bien entendu inductif, mais seul le cas des ensembles inductifs présente un intérêt. Les axiomes introduits jusqu'ici ne permettent pas d'affirmer ni d'infirmer l'existence d'ensembles inductifs.

Lemme 1
L'intersection d'une famille non vide d'ensembles inductifs est un ensemble inductif.

En effet, soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'ensembles inductifs et soit $B = \bigcap_{i\in I} A_i$ l'intersection de cette famille. On a bien entendu $\varnothing \in B$. Soit $a \in B$. Pour tout $i \in I$, on a $a \in A_i$, et comme A_i est inductif, $a \cup \{a\} \in A_i$, et par conséquent $a \cup \{a\}$ est un élément de l'intersection B. CQFD.

Il est aisé de voir que ce lemme est également vrai pour une famille non vide de collections inductives.
La conséquence immédiate de ce lemme est le suivant

Lemme
S'il existe au moins un ensemble inductif, alors il existe un plus petit ensemble inductif (c'est-à-dire qui est inclus dans tout autre ensemble inductif).

Il suffit de considérer l'intersection de la collection de tous les ensembles inductifs.

b. Collections transitives

Une collection A est dite *transitive* si tout élément de A est une partie de A. Autrement dit, les éléments des éléments de A sont des éléments de A.

L'univers $\mathcal{U}$ est une collection transitive, puisque tout ensemble est inclus dans $\mathcal{U}$. Les ensembles $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ et $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ sont transitifs.

Lemme
L'intersection d'une famille non vide de collections transitives est une collection transitive.

En effet, soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille non vide de collections transitives et soit $B = \bigcap_{i\in I} A_i$ l'intersection de cette famille. Soit $a \in B$. Pour tout $i \in I$, on a $a \in A_i$, et comme A_i est transitif, on a $a \subset A_i$, et par conséquent $a \subset B$. CQFD.

2. Collections bien ordonnées

a. Définition

Soit $(A, \leq)$ une collection ordonnée (on rappelle que c'est la donnée d'une collection A et d'une relation d'ordre $\leq$ sur A). On dit que cette collection est *bien ordonnée* ou que l'ordre $\leq$ sur A est un *bon ordre* si toute partie non vide B de A possède un minimum pour cette relation.
La relation $<$ est appelée un bon ordre *strict* sur A .
S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la relation $\leq$, on parlera plus simplement de la collection ordonnée A .
Soit une partie B de A . Il est clair que la relation induite par $\leq$ sur B est aussi un bon ordre.

En particulier, si A est un ensemble, alors la relation $\leq$, qui est une partie de A^2 , est un ensemble ; et la collection des bons ordres sur A est aussi un ensemble puisque c'est une partie de l'ensemble $\mathcal{P}(A^2)$ des relations binaires sur A .

Lemme
Une collection bien ordonnée $(A, \leq)$ est totalement ordonnée.

En effet, deux éléments a et b de A sont toujours comparable par $\leq$ car la partie $\{ a, b \}$ de A à deux doit posséder un minimum.

Soit $u \in A$. On peut donc considérer la partie des éléments de A strictement supérieurs à u . Si cette partie est non vide, son minimum u' est appelé le *successeur* de u pour $\leq$; u' est alors le *prédécesseur* de u. Un élément de A distinct du minimum de A et qui n'a pas de prédécesseur pour $\leq$ est dit *limite* dans A pour $\leq$.

b. Segment initial d'une collection bien ordonnée

Dans ce partie, $(A, \leq)$ est une collection bien ordonnée dont le minimum est o.

Soit une partie s de A. On dit que s est un *segment initial* de A si pour tout $u \in s$, tout élément de A strictement inférieur à u appartient à s. Bien entendu A est un segment initial de A.

Soient u et v deux éléments de A. La collection $x \in A$ **et** $u \leq x < v$ est notée $\boldsymbol{[u, v[_{A, \leq}}$ ou $\boldsymbol{S_{u, v}(A, \leq)}$. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la relation , on la notera $\boldsymbol{[u, v[_{A}}$ ou $\boldsymbol{S_{u, v}(A)}$, et s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la collection A , on la notera plus simplement $\boldsymbol{[u, v[}$ ou $\boldsymbol{S_{u, v}}$.
Mais on considèrera essentiellement le cas où u est le minimum o . Dans ce cas, cette collection est
$x \in A$ **et** $x < v$ et on la note $\boldsymbol{[o, v[}$ ou $\boldsymbol{S_v}$.

Pour un $v \in A$, S_v est bien évidemment un segment initial puisque pour tout $u \in S_v$, on a $u < v$. Alors pour tout $w \in A$, si $w < u$ alors $w < v$, donc $w \in S_v$.

Lemme
Une partie s de A est un segment initial si et seulement si $s = A$ ou $s = S_u$, pour un $u \in A$.

En effet, si $s = A$ ou si $s = S_u$ pour un $u \in A$, alors évidemment s est un segment initial.
Réciproquement s est un segment initial, il faut montrer que $s = A$ ou $s = S_u$, pour un $u \in A$, autrement dit que $s \neq A$ implique $s = S_u$, pour un $u \in A$. Faisons donc l'hypothèse $s \neq A$. On considère alors la collection $A - s = \{x \in A ; x \notin s\}$. Elle est non vide donc possède un minimum u. Soit $x \in A$.. Si $x < u$ alors $x \in s$ donc $S_u \subset s$. Et si $x \in s$, on a forcément $x < u$ car $x \geq u$ impliquerait que $x \notin s$. On a donc $s \subset S_u$, et par conséquent $s = S_u$. CQFD.

Un segment initial s de A est dit *strict* si $s \neq A$. Le bon ordre $\leq$ est dit *primaire* si tout segment initial de A est un ensemble. Tout bon ordre sur un ensemble est bien évidemment primaire. Lorsque nous parlerons d'un bon ordre sur une collection susceptible d'être une transcollection, ce bon ordre sera supposé primaire car nous ne considérerons que de tels bons ordres.

3. Les ordinaux

a. Définition et propriétés fondamentales

On dit d'un ensemble α qu'il est un *ordinal* s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

- α est transitif
- la relation $x \in y$ **ou** $x = y$ est un bon ordre sur α .

La relation $x \in y$ est donc un bon ordre strict sur α.

La collection des ordinaux, est notée ***On***, c'est-à-dire, $On(\alpha)$ ou $\alpha \in On$ est l'énoncé « α est un ordinal » définit ci-dessus.

Par exemple, on vérifie aisément que les ensembles $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ et $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, sont des ordinaux .

Lemme 1
Si α est un ordinal, alors $\alpha \notin \alpha$. Autrement dit, si $\beta \in \alpha$, alors $\beta \neq \alpha$.

L'ordre $\in$ étant strict sur α, on a donc pour tout élément x de α, $x \notin x$. Si $\alpha \in \alpha$, on a alors $\alpha \notin \alpha$, ce qui est une contradiction.

Lemme 2
Soit un ordinal α. Une partie s de α est un segment initial de α, si et seulement si elle est transitive.

En effet, dire que s est un segment initial de α signifie que si un élément β de α appartient à s, alors tout élément de β appartient à s, autrement dit s est transitive.

Lemme 3
Soit un ordinal α . Les segments initiaux de α sont α et ses éléments

En effet, les segment initiaux stricts de α sont les ensembles S_β avec $\beta \in \alpha$ (lemme [II. 2. b]) . Or
$S_\beta = \{x \in \alpha\,;\ x < \beta\} = \{x \in \alpha\,;\ x \in \beta\} = \alpha \cap \beta = \beta$ puisque α étant transitif, $\beta \in \alpha$ implique $\beta \subset \alpha$. CQFD.

Les éléments de α sont donc ses segment initiaux stricts.

Lemme 4
Si α est un ordinal, tout élément β de α est un ordinal.

En effet, $\beta \subset \alpha$ (puisque α est transitif) ; par conséquent $\in$ est une relation de bon ordre induite sur β. D'autre part, β est un segment initial de α, donc est transitif (lemmes 2 et 3).

Ainsi donc, tout segment initial d'un ordinal est un ordinal.

- THÉORÈME 1

Toute collection non vide A d'ordinaux a un minimum α pour la relation $\in$. Cet élément est l'intersection de A .

En effet, soit $\alpha = \bigcap_{\mu \in A} \mu$. Il est acquis que α est un ensemble (lemme 2 [I. 4. c]). α est une partie de tout ordinal $\mu \in A$ et de plus il est transitif, puisque c'est l'intersection d'ensembles transitifs (lemme [II. 1. b]) ; donc α est un segment initial de tout $\mu \in A$ (lemme 2), donc est un ordinal (lemmes 3). Supposons que pour tout $\mu \in A$, on ait $\alpha \neq \mu$. Alors le lemme 3 implique que $\alpha \in \mu$ pour tout $\mu \in A$, donc $\alpha \in \bigcap_{\mu \in A} \mu$, c'est-à-dire $\alpha \in \alpha$, ce qui est impossible (lemme 2). Il existe donc $\mu \in A$ tel que $\alpha = \mu$. Le lemme 3 assure donc que pour tout élément ν de A distinct de α , $\alpha \in \nu$. CQFD.

La conséquence immédiate de ce théorème est le :

Corollaire
Soient α et β deux ordinaux. On a soit $\alpha = \beta$, soit $\alpha \in \beta$, soit $\beta \in \alpha$.

Il suffit d'appliquer le théorème en prenant pour A l'ensemble $\{\alpha, \beta\}$.
Il est clair que pour les ordinaux, la relation $\alpha \leq \beta$, c'est-à-dire $\alpha \in \beta$ **ou** $\alpha = \beta$, n'est autre que la relation d'inclusion $\alpha \subset \beta$.

Ce théorème implique aussi q'une collection A d'ordinaux est bien ordonnée par la relation $\in$. La conséquence immédiate est le

Lemme 5
Pour qu'un ensemble a d'ordinaux soit un ordinal, il faut et il suffit qu'il soit transitif..

Soit une collection A. La collection des ordinaux appartenant à A est notée $\boldsymbol{On}_{\mathbf{A}}$. $On_{\mathcal{U}}$ est donc On, et pour tout ordinal α, $On_\alpha = \alpha$.

- THÉORÈME 2

La réunion réu (a) d'un ensemble a d'ordinaux est un ordinal.

La réunion ρ de a est un ensemble d'ordinaux. Il suffit donc de montrer que ρ est transitif. Soit $\alpha \in \rho$. α appartient à un ordinal μ de a. On a donc $\alpha \subset \mu$, donc $\alpha \subset \rho$. CQFD.

En particulier, la réunion d'une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ d'ordinaux (indexée par un ensemble) est un ordinal.

Corollaire
Étant donné un ensemble a d'ordinaux , il existe un ordinal supérieur à tous les éléments de a.

Il est clair que l'ordinal ρ = réu (a) possède la propriété cherchée, car étant donné un élément α de a, si $\rho < \alpha$, c'est-à-dire si $\rho \in \alpha$, alors $\rho \in \rho$, ce qui est impossible (lemme 1). Il est clair que ρ est le plus petit ordinal supérieur aux éléments de a, autrement dit la *borne supérieure* de a. En effet, pour tout ordinal $\beta < \rho$, β appartient (donc est strictement inférieur) à un élément de a. CQFD.

Lemme 6
Si α est un ordinal, alors $\alpha \cup \{\alpha\}$ est aussi un ordinal. C'est le plus petit ordinal strictement supérieur à α. On l'appelle le *successeur* de α et α est appelé le *prédécesseur* de $\alpha \cup \{\alpha\}$.

En effet, tout élément de $\alpha \cup \{\alpha\}$ est un élément de α ou est égal à α. Dans les deux cas, cet élément est une partie de α et donc de $\alpha \cup \{\alpha\}$, qui est par conséquent un ensemble transitif d'ordinaux, donc un ordinal. C'est le plus petit strictement supérieur à α. En effet, si β est un ordinal tel que $\beta > \alpha$, cela signifie alors que $\alpha \in \beta$ et donc $\alpha \subset \beta$. De plus $\alpha \in \beta$ implique aussi que $\{\alpha\} \subset \beta$. On a donc $\alpha \cup \{\alpha\} \subset \beta$, c'est-à-dire $\alpha \cup \{\alpha\} \leq \beta$. CQFD.

1) Les collections ordinales

La collection On des ordinaux possède les caractéristiques d'un ordinal : elle est transitive et elle est bien ordonnée par la relation $\in$. Mais elle n'est pas un ensemble, car si c'était le cas, elle serait un ordinal et on aurait $On \in On$, ce qui est impossible (lemme 1). C'est donc une transcollection appelée le *transordinal* de $\mathcal{U}$. Les segments initiaux stricts de On sont les ordinaux, ce qui montre que le bon ordre $\in$ sur On est primaire.

On peut définir sur des transcollections des bons ordres qui ne sont pas primaires. Par exemple, Considérons la relation (dite *lexicographique*) définie sur On^2, c'est-à-dire entre deux couples d'ordinaux par :
$(\alpha, \beta) < (\alpha', \beta')$ si et seulement si $\alpha \in \alpha'$ **ou** ($\alpha = \alpha'$ **et** $\beta \in \beta'$). D'après cet ordre, le plus petit de deux couples d'ordinaux est celui qui a la plus petite première projection, et en cas d'égalité des premières projections, c'est celui qui a la plus petite seconde projection. C'est évidemment une relation d'ordre strict. C'est un bon ordre car pour toute collection non vide A de couples d'ordinaux, on sélectionne d'abord ceux dont la première projection est la plus petite des premières projections ; puis parmi ceux-ci (qui ont alors tous la même première projection) on sélectionne celui (forcément unique) qui a la plus petite des secondes projections. C'est bien entendu le plus petit élément de A selon cette relation d'ordre. Mais ce bon ordre n'est pas primaire ; il y a en effet des segments initiaux pour cette relation qui ne sont pas des ensembles. Par exemple si $u = (1, 0)$, S_u est la collection des couples de la forme $(0, \alpha)$, avec $\alpha \in On$. Il est aisé de voir que la collection des secondes projections des éléments de S_u est On, et donc d'après le lemme 1 [I. 4.c], S_u n'est pas un ensemble, puisque On

ne l'est pas. On dira de ce bon ordre qu'il est *secondaire*. Mais comme on l'a déjà dit, les bons ordres que nous aurons à utiliser sur les transcollections sont primaires.

On appelle *collection ordinale* un segment initial de *On*. Alors le lemme suivant est évident.

Lemme 6
Une collection ordinale θ est soit un ordinal, soit *On*.

Lemme 7
Une collection θ est ordinale si et seulement si c'est une collection transitive d'ordinaux.

En effet, si θ est une collection ordinale alors c'est bien sûr une collection transitive d'ordinaux. Réciproquement, si θ est une collection transitive d'ordinaux, alors si θ est un ensemble, alors c'est un ordinal. Et si θ n'est pas un ensemble, supposons qu'il existe un ordinal qui n'appartienne pas à θ ; soit alors α le plus petit ordinal de ce genre.
Alors soit $\beta \in \theta$. Si $\beta \geq \alpha$, alors si $\beta = \alpha$, on a $\alpha \in \theta$, ce qui est une contradiction. $\beta > \alpha$ est également impossible car on aurait aussi $\alpha \in \theta$ (puisque θ est transitive). On a donc $\beta < \alpha$, ce qui veut dire que $\theta \subset \alpha$, et donc θ est un ensemble, ce qui est encore une contradiction. Tout ordinal appartient donc à θ. On a donc
On $\subset \theta$ mais aussi $\theta \subset$ *On* (puisque θ est une collection d'ordinaux), et donc $\theta =$ *On*. CQFD.

2) Les ordinaux finis. Les entiers naturels

On a $\varnothing \subset \alpha$ pour tout ordinal α. C'est donc le premier ordinal, que nous avons déjà noté 0 et appelé aussi l'ordinal nul ; son successeur est $\{\varnothing\}$ noté 1 ; le successeur de 1 est $1 \cup \{1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ noté 2 ; $2 \cup \{2\}$ est noté 3 etc. On appelle ces ordinaux ainsi construits *entiers intuitifs*.

Le successeur (qui existe toujours) d'un ordinal α est noté $\alpha + 1$. Le prédécesseur (s'il existe) d'un ordinal α est noté $\alpha - 1$ (notation à ne pas confondre avec celle de la différence de deux collections)

Définition
Un ordinal α est dit *fini* si tout ordinal non nul $\beta \leq \alpha$ a un prédécesseur. Dans le cas contraire, il est dit *infini*.

Les entiers intuitifs 0, 1, 2, 3, … construits plus hauts sont évidemment des ordinaux finis.

Nous ne sommes pas pour l'instant en mesure d'exhiber le moindre ordinal infini (On verra plus loin que la collection des ordinaux finis en est un). Cependant, cette définition d'un ordinal fini appliquée à *On* montre que c'est est une collection ordinale infinie. En effet, si *On* avait un prédécesseur α, comme α est forcément un ordinal, il en serait de même pour *On* $= \alpha + 1$.

Lemme 8
Un ordinal α est fini si et seulement s'il a un prédécesseur et si tout ordinal $\beta < \alpha$ est fini.

En effet, si α est fini, il a un prédécesseur. Soit $\beta < \alpha$; si β est infini, alors il existe un ordinal $\gamma \leq \beta$ qui n'a pas de prédécesseur. Mais $\gamma < \alpha$, ce qui montre qu'un ordinal $< \alpha$ n'a pas de prédécesseur et donc α n'est pas fini, ce qui est une contradiction. Réciproquement, si α a un prédécesseur et si tous ses éléments sont finis il est clair que tout ordinal non nul $\leq \alpha$ a un prédécesseur donc α est fini.

On en déduit immédiatement que si α est fini, alors $\alpha + 1$ est fini. En effet, $\alpha + 1$ a un prédécesseur et ses éléments, α et ses éléments, sont finis.

Remarque
L'énoncé « x est un entier intuitif » est la disjonction infinie (au sens intuitif du terme) : $x = 0$ **ou** $x = 1$ **ou** $x = 2$ **ou** $x = 3$ **ou** … dans laquelle chaque énoncé $x = n$ est un énoncé du premier ordre. Par conséquent, c'est un énoncé du second ordre. Cette collection est notée ω.

Un ordinal fini sera aussi appelé un *entier naturel* ou *entier fini* ou encore simplement *entier*. Sauf précision contraire, c'est désormais le sens qu'aura le terme "entier". Un *uplet* ou *suite finie* sera une famille d'ensembles indexée par un entier fini (au sens défini ici).

b. Démonstration et définition par induction sur les ordinaux

1) *Démonstration par induction*

THÉORÈME 1
Soit une collection P . Si $(\forall\alpha \in On)\,(\alpha \subset P \;\Rightarrow\; \alpha \in P)$ alors $On \subset P$

La collection P exprime une propriété. Ce théorème signifie que pour montrer que cette propriété est vraie pour tout ordinal, il suffit de montrer que pour tout ordinal α, sa véracité pour les ordinaux strictement inférieurs à α implique sa véracité pour α . En effet, supposons démontré que pour tout ordinal α , tout ordinal $\beta < \alpha$ vérifie P . Supposons alors qu'il existe un ordinal ne vérifiant pas à P. Soit γ le premier ordinal de ce genre. Tous les ordinaux strictement inférieurs à γ vérifient donc P , or on a montré que dans ce cas γ aussi la vérifie, ce qui est une contradiction.

Cette méthode de démonstration s'appelle démonstration par induction.

2) *Définition par induction*

En particulier, ce théorème est utile pour définir un certain type d'application f d'une collection ordinale θ dans une collection W. Soit $\alpha\in\theta$. On veut associer à α son image $f(\alpha)$. On commence alors par supposer que $f(\beta)$ a été définie pour tout ordinal $\beta < \alpha$. Si avec cette hypothèse on sait définir $f(\alpha)$, alors f est définie pour tout $\alpha\in\theta$.
Tout réside dans le fait de "savoir définir $f(\alpha)$ à partir des $f(\beta)$ pour $\beta < \alpha$ ". C'est le *procédé* permettant cette définition qu'énonce le théorème suivant.

THÉORÈME 2 : ***Principe de définition par induction***
Soient une collection ordinale θ , W une collection, M la collection des applications définies sur les ordinaux $\alpha < \theta$ et à valeurs dans W , et H une application de M dans W. Alors il existe une application f de θ dans W telle que pour tout $\alpha < \theta$, $f(\alpha) = H(f\,|\,\alpha)$. Et f est la seule application ayant cette propriété.

Démontrons ce théorème par étapes.

Étape 1
Soit θ' une collection ordinale incluse dans θ. S'il existe une application f de θ' dans W t elle que pour tout $\alpha < \theta'$, on ait : $f(x) = H(f\,|\,\alpha)$, alors f est unique.

Supposons qu'il existe une application g ayant cette propriété. Montrons par induction qu'on a alors $g(x) = f(x)$, pour tout $\alpha < \theta'$. On suppose donc que pour tout $\beta < \alpha$, on a $g(\beta) = f(\beta)$. On a alors $g\,|\,\alpha = f\,|\,\alpha$,
donc $H(g\,|\,\alpha) = H(f\,|\,\alpha)$ soit $g(\alpha) = f(\alpha)$.

L'application f étant unique on la notera $f_{\theta'}$ ou f_τ si $\theta' = \tau$, pour $\tau < \theta$. Nous dirons ici, pour simplifier, que " $f_{\theta'}$ existe" pour signifier qu'il existe une application f de θ' dans W telle que pour tout $\alpha < \theta'$, on ait : $f(\alpha) = H(f\,|\,\alpha)$.

Étape 2
Soit θ' un ordinal inclus dans θ. Si $f_{\theta'}$ existe, alors pour tout $\alpha < \theta'$, f_α existe et on a : $f_\alpha = f_{\theta'}\,|\,\alpha$.
Réciproquement, si pour tout $\alpha < \theta'$, f_α existe, alors $f_{\theta'}$ existe.

- Supposons que $f_{\theta'}$ existe. Soient $\alpha < \theta'$. Pour tout $\beta < \alpha$, on a $f_{\theta'}(\beta) = H(f_{\theta'}\,|\,\beta)$. On a aussi $f_{\theta'}(\beta) = (f_{\theta'}\,|\,\alpha)(\beta)$ et aussi $f_{\theta'}\,|\,\beta = (f_{\theta'}\,|\,\alpha)\,|\,\beta$ d'où $f_{\theta'}(\beta) = H((f_{\theta'}\,|\,\alpha)\,|\,\beta)$ et donc $(f_{\theta'}\,|\,\alpha)(\beta) = H[(f_{\theta'}\,|\,\alpha)\,|\,\beta]$, pour tout $\beta < \alpha$. Donc f_α existe et on a $f_\alpha = f_{\theta'}\,|\,\alpha$.

- Réciproquement, supposons que pour tout $\alpha < \theta'$, f_α existe. Soit alors f l'application de θ' dans W définie par
  $f(\alpha) = H(f_\alpha)$, pour $\alpha < \theta'$. Soit $\beta < \alpha$. On a $f(\beta) = H(f_\beta)$. $\beta < \alpha$, donc d'après ce qui précède, $f_\beta = f_\alpha|\beta$, donc $H(f_\beta) = H(f_\alpha|\beta) = f_\alpha(\beta)$, donc $f(\beta) = f_\alpha(\beta)$, pour $\beta < \alpha$; donc $f|\alpha = f_\alpha$, d'où $f(\alpha) = H(f|\alpha)$, pour tout $\alpha < \theta'$; ce qui veut dire que $f_{\theta'} = f$ existe.

Étape 3
f_θ existe.

En effet, d'après l'étape 2, il suffit d'établir que pour tout $\alpha < \theta$, f_α existe, ce que l'on montre par induction. Soit $\alpha < \theta$. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, f_β existe. D'après l'étape 2, alors f_α existe. Donc pour tout $\alpha < \theta$, f_α existe. CQFD.

c. Isomorphisme de collections bien ordonnées

Dans cette partie $(A, <)$ et $(A', <')$ sont deux collections bien ordonnées et o est le plus petit élément de A . . L'ordre $<'$ sera aussi noté pour simplifier $<$. Ce n'est pas gênant car il suffit de savoir qu'il n'a pas à priori la même signification sur A' que sur A .

Définition
On dit qu'une application φ est un *isomorphisme* (*de collections bien ordonnées*) de $(A, <)$ sur $(A', <)$, ou encore (s'il n'y a pas d'ambiguïté sur les ordres concernés) de A sur A' , si φ est bijective et si pour tous éléments x et y de A, on a : $x < y \Leftrightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$.

On dit alors simplement que A et A' sont *isomorphes*.

L'application identité Id est un isomorphisme de A sur A puisqu'elle est bijective et que pour tous éléments x et y de A, on a : $x < y \Leftrightarrow x < y$.

Lemme 1
Pour que φ soit un isomorphisme de A sur A' , il suffit qu'elle soit surjective (c'est-à-dire on a $\varphi< A > = A'$) et que pour tous éléments x et y de A, on ait : $x < y \Leftrightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$.

Comme φ est surjective, il suffit de montrer qu'elle est une injection de A sur A'. Pour cela considérons deux éléments a et b de A tels que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Supposons $a \neq b$. Alors $a < b$ implique $\varphi(a) < \varphi(b)$, ce qui est une contradiction. Idem avec l'hypothèse $a > b$. CQFD.

Il est clair que la bijection réciproque φ^{-1} est un isomorphisme de A' sur A. On vérifie également que si ψ est un isomorphisme de $(A', <')$ sur $(A'', <'')$, alors $\psi \circ \varphi$ est un isomorphisme de $(A, <)$ sur $(A'', <'')$.

Lemme 2
Si φ est un isomorphisme de A' sur A, alors $\varphi(o)$ est le plus petit élément de A' .

En effet, supposons qu'il existe un élément b' de A' tel que $b' < \varphi(o)$. Soit alors $b \in A$ tel que $b' = \varphi(b)$. On a donc $\varphi(b) < \varphi(o)$, donc $b < o$, ce qui contredit le fait que o est le minimum de A. CQFD.

Lemme 3
Une application φ de A dans A' soit un isomorphisme de A sur A' , si et seulement si φ est surjective et que pour tout $x \in A$, on a : $\varphi < [o, x[> = [\varphi(o), \varphi(x)[$

En effet, supposons que φ est surjective et que pour tout $x \in A$, $\varphi < [o, x[> = [\varphi(o), \varphi(x)[$. Alors pour tous éléments
a et b de A, on a : $\varphi < [o, a[> = [\varphi(o), \varphi(a)[$ (1) et $\varphi < [o, b[> = [\varphi(o), \varphi(b)[$ (2).
Si $a < b$, alors $a \in [o, b[$, donc d'après (2), $\varphi(a) \in [\varphi(o), \varphi(b)[$, donc $\varphi(a) < \varphi(b)$.
A l'inverse si $\varphi(a) < \varphi(b)$, alors $b \leq a$ est impossible, car si $b = a$, on aurait $\varphi(b) = \varphi(a)$, ce qui est contradictoire ; et si $b < a$, alors $b \in [o, a[$, donc d'après (1), $\varphi(b) \in [\varphi(o) , \varphi(a)[$, donc $\varphi(b) < \varphi(a)$, ce qui aussi est contradictoire. Par conséquent, $b > a$. On a donc montré que pour tous éléments a et b de A,

on a : $a < b \Leftrightarrow \varphi(a) < \varphi(b)$. Comme φ est surjective, c'est donc un isomorphisme de A sur A' .

Réciproquement, si φ est un isomorphisme, soit $x \in A$; pour tout $y \in A$, on a
$y < x \Rightarrow \varphi(y) < \varphi(x)$, ce qui signifie que $\varphi < [o, x[> \subset [\varphi(o), \varphi(x)[$
A l'inverse, soit $y' \in [\varphi(o), \varphi(x)[$. Montrons que $y' \in \varphi < [o, x[>$, ce qui établira que
$[\varphi(o), \varphi(x)[\subset \varphi < [o, x[>$ et par conséquent que $\varphi < [o, x[> = [\varphi(o), \varphi(x)[$, ce qui est le résultat cherché.

Comme φ est bijective, il existe $y \in A$ tel que $y = \varphi^{-1}(y')$, soit $y' = \varphi(y)$. Or $y' \in [\varphi(o), \varphi(x)[$ implique $y' < \varphi(x)$, c'est-à-dire $\varphi(y) < \varphi(x)$, ce qui implique $y < x$, donc $y \in [o, x[$, donc
$y' = \varphi(y) \in \varphi < [o, x[>$. CQFD.

Ce lemme implique que si φ est un isomorphisme, alors l'image d'un segment initial strict de A est un segment initial strict de A' .

Lemme 4
Soient deux collections bien ordonnées A et A' . Si φ une application de A dan A' telle que pour tout
$x \in A$, $\varphi < [o, x[> = [\varphi(o) , \varphi(x)[$, alors φ est un isomorphisme de A sur $\varphi< A >$ et $\varphi< A >$ est un segment initial de A'.

D'abord φ est une surjection de A sur $\varphi< A >$; et comme pour tout $x \in A$,
$\varphi < [o, x[> = [\varphi(o) , \varphi(x)[$, d'après le lemme précédent φ est un isomorphisme de A sur $\varphi< A >$.

Montrons que $\varphi< A >$ est un segment initial de A' . Soit $u' \in \varphi< A >$. Il existe alors $u \in A$ tel que
$\varphi(u) = u'$. Soit $v' \in A'$. Si $v' < u'$, alors $v' < \varphi(u)$, c'est-à-dire $v' \in [\varphi(o) , \varphi(u)[$. Comme
$\varphi < [o, u[> = [\varphi(o) , \varphi(u)[$, il existe donc $v \in [o , u[$ tel que $v' = \varphi(v)$; par conséquent
$v' \in \varphi< A >$. CQFD.

Lemme 5
Si φ est un isomorphisme de A sur A', alors pour tout $a \in A$, $\varphi \mid [o, a[$ est un isomorphisme de $[o, a[$ sur $[\varphi(o) , \varphi(a)[$.

Notons par φ_a la restriction $\varphi \mid [o, a[$ de φ à $[o, a[$. Soient u et v des éléments de $[o, a[$. On a bien entendu $\varphi_a(u) = \varphi(u)$ et $\varphi_a(v) = \varphi(v)$. Mais u et v sont des éléments de A , donc on a
$u < v \Leftrightarrow \varphi(u) < \varphi(v)$ et donc $u < v \Leftrightarrow \varphi_a(u) < \varphi_a(v)$, ce qui montre que φ_a est un isomorphisme de $[o, a[$ sur $[\varphi(o) , \varphi(a)[$. CQFD.

THÉORÈME 1
Étant donnée une collection bien ordonnée $(A, <)$, deux segments initiaux de A isomorphes sont égaux, et l'isomorphisme est l'application identité Id.

Soient A_1 et A_2 deux segments initiaux de A et φ un isomorphisme de A_1 sur A_2 . Supposons qu'il existe des éléments x de A_1 tels que $\varphi(x) \neq x$. Soit a le plus petit de ces éléments. Pour tout $b < a$, on a donc
$\varphi(b) = b$, ce qui implique que $\varphi< [o, a[> = [o, a[$. D'après le lemme 3, on a aussi
$\varphi < [o, a[> = [\varphi(o) , \varphi(a)[= [o , \varphi(a)[$, donc $[o, a[= [o , \varphi(a)[$ donc évidemment $a = \varphi(a)$,
ce qui est une contradiction. Par conséquent pour tout $x \in A_1$, $\varphi(x) = x = \mathrm{Id}(x)$. CQFD.

Corollaire 1
L'application identité Id est le seul isomorphisme de A sur A .

Corollaire 2
Deux collections ordinales isomorphes sont égales, et l'isomorphisme est l'application Id.

Corollaire 3
Il n'existe aucun isomorphisme de A sur un de ses segments initiaux stricts.

En effet, si tel était le cas, A serait égal à un de ses segments initiaux stricts.

Corollaire 4

Si φ est un isomorphisme de A sur A', alors un segment initial de A est isomorphe à un segment initial unique de A'

En effet, supposons qu'un segment initial B de A soit isomorphe à deux segments initiaux B' et B'' de A'. Alors B' et B'' sont isomorphes et par conséquent sont égaux.

Lemme 6
Si φ est un isomorphisme de A sur A', alors cet isomorphisme est unique.

Supposons un isomorphisme ψ de A sur A'. Alors $\psi^{-1} \circ \varphi$ est un isomorphisme de A sur A, et donc, d'après le corollaire 1 précédent, $\psi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}$, d'où $\psi = \varphi$.

Lemme 7
Soient deux collections bien ordonnées A et A'. La collection
$B = \{x \in A \; ; \; [o, x[$ est isomorphe à un segment initial strict de $A' \}$ est un segment initial de A.

Soit $u \in B$; $[o, u[$ est alors isomorphe à un segment initial strict $[o', u'[$ de A'. Cet isomorphisme étant unique, notons -le φ_u. Soit $v \in A$. Si $v < u$, alors $[o, v[$ est un segment initial strict de $[o, u[$;
par conséquent (lemme 5) la restriction $\varphi_u \mid [o, v[$ de φ_u à $[o, v[$ est un isomorphisme de $[o, v[$ sur
$[\varphi_u(o), \varphi_u(v)[\; = \; [o', \varphi_u(v)[$, et donc $v \in B$. CQFD.

THÉORÈME 2
Toute collection bien ordonnée $(A, <)$ est isomorphe à une collection ordinale θ unique et cet isomorphisme est unique.

- *Unicité* :
Découle du lemme 6.

- *Existence* :
Désignons par θ la collection des ordinaux isomorphes à un segment initial strict de A. Soit $\alpha \in \theta$. α est isomorphe à un segment initial strict $[o, a[$ de A. Cet isomorphisme est alors unique; notons le φ_α. On a alors $\varphi_\alpha < \alpha > \; = \; [o, a[$. D'après le lemme 7, θ est un segment initial de On donc θ est une collection ordinale.

On définit une application φ de θ dans A telle que $\varphi(0) = o$ et pour tout $\alpha \in \theta$, $\varphi(\alpha)$ soit l'élément a de A tel que $\varphi_\alpha < \alpha > \; = \; [o, a[$. On a donc $\varphi_\alpha < \alpha > \; = \; [\varphi(0), \varphi(\alpha)[$.

Soient $\beta < \alpha$ et $b = \varphi_\alpha(\beta)$. β est un segment initial strict de α donc (lemme 3)
$\varphi_\alpha < [0, \beta[> \; = \; [\varphi_\alpha(0), \varphi_\alpha(\beta)[\; = \; [o, b[\; = \; \varphi_\beta < \beta > \; = \; [\varphi(0), \varphi(\beta)[$, d'où $\varphi(\beta) = \varphi_\alpha(\beta)$ pour tout
$\beta < \alpha$, et donc $\varphi_\alpha = \varphi \mid \alpha$. Par conséquent, on a pour tout $\alpha \in \theta$, $\varphi < [0, \alpha[> \; = \; \varphi < \alpha >$
$= \; (\varphi \mid \alpha) < \alpha > \; = \; \varphi_\alpha < \alpha > \; = \; [\varphi(0), \varphi(\alpha)[$, ce qui (lemme 4) montre que φ est un isomorphisme de θ sur $B = \varphi < \theta >$ et aussi que B est un segment initial de A.

Montrons pour finir que $B = A$. Supposons que $B \neq A$. Alors B est un segment initial strict de A donc c'est un ensemble (car l'ordre sur A est primaire). Dans ce cas, d'après le schéma de remplacement, $\theta = \varphi^{-1} < B >$ est aussi un ensemble, donc un ordinal. Or par définition θ est la collection des ordinaux isomorphes à un segment initial strict de A ; on a donc $\theta \in \theta$, ce qui est une contradiction. CQFD.

La collection ordinale θ isomorphe à A est appelée le *type d'ordre* de $(A, <)$, où parfois, *la collection ordinale* de $(A, <)$. On note $\theta = \tau(A, <)$ ou $\tau(A)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ordre concerné. Nous avons par la même occasion indirectement montré que θ est un ordinal si et seulement si A est un ensemble. En effet, on a
$\varphi < \theta > \; = \; A$ et $\varphi^{-1} < A > \; = \; \theta$ et le schéma de remplacement montre que si A est un ensemble, θ l'est et vice versa. On en déduit immédiatement que toute transcollection bien ordonnée (avec un bon ordre primaire bien sûr) est isomorphe à On.

Pour une collection ordinale θ, on a évidemment $\tau(\theta) = \theta$ (l'ordre considéré étant bien sûr la relation d'appartenance dans θ)

Lemme 8
Soit une collection quelconque A. S'il existe une bijection φ de A sur une collection ordinale θ, alors la relation définie sur A par : $x < y \iff \varphi(x) < \varphi(y)$ est un bon ordre strict sur A et θ est le type d'ordre de A muni de ce bon ordre.

Pour deux éléments a et b de A, si $a < b$, alors $\varphi(a) < \varphi(b)$. Mais $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ étant des ordinaux, on n'a pas $\varphi(b) < \varphi(a)$ et par conséquent on n'a pas $b < a$.
Pour des éléments a, b et c de A, $a < b$ et $b < c$ implique $\varphi(a) < \varphi(b)$ et $\varphi(b) < \varphi(c)$, donc $\varphi(a) < \varphi(c)$, par conséquent $a < c$.
C'est donc une relation d'ordre sur A, qui est bien sûr totale, puisqu'elle l'est sur θ. Soient une partie non vide B de A et μ le plus petit élément de $\varphi < B >$. Il est clair que $m = \varphi^{-1}(\mu)$ est le plus petit élément de B. On a donc un bon ordre sur A, et de la façon dont cet ordre est défini, la bijection φ est un isomorphisme de A sur θ. CQFD.

4. Les cardinaux

a. Théorème de Cantor-Bernstein

Lemme 1
Soient un ensemble A et une application φ de $\mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{P}(A)$ croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire telle que pour toutes parties X et Y de A on ait: $X \subset Y \Rightarrow \varphi(X) \subset \varphi(Y)$. Alors il existe une plus petite partie E de A telle que $\varphi(E) = E$.

Démonstration :
Soit W l'ensemble des parties X de A telles que $\varphi(X) \subset X$. W n'est pas vide car il est clair que $\varphi(A) \subset A$. Alors soit $E = \text{inter}\,(W)$. On a $E \in W$. En effet pour tout $Z \in W$, on a $E \subset Z$, donc $\varphi(E) \subset \varphi(Z)$. Comme $\varphi(Z) \subset Z$, on a donc $\varphi(E) \subset Z$, d'où $\varphi(E) \subset E$. Nous avons donc par la même occasion montré que E est le plus petit élément de W.
Montrons à présent que $E \subset \varphi(E)$. En effet, comme $\varphi(E) \subset E$, on a donc $\varphi(\varphi(E)) \subset \varphi(E)$ donc $\varphi(E) \in W$, d'où $E \subset \varphi(E)$. On a donc en définitive $\varphi(E) = E$. CQFD.

Lemme 2
Soient deux ensembles A et B, f une application de A dans B et g une application de B dans A. Il existe deux parties A_1 et A_2 de A et deux parties B_1 et B_2 de B telles que :
$A_2 = A - A_1$; $B_2 = B - B_1$; $B_1 = f < A_1 >$; $A_2 = g < B_2 >$.

Démonstration :
Définissons l'application φ de $\mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{P}(A)$ par : $\varphi(X) = A - g < B - f < X > >$. Montrons que φ est croissante.
Si X et Y sont deux parties de A, si $X \subset Y$, alors $f < X > \subset f < Y >$ donc $B - f < Y > \subset B - f < X >$, donc $g < B - f < Y > > \subset g < B - f < X > >$ donc $A - g < B - f < X > > \subset A - g < B - f < Y > >$, c'est-à-dire $\varphi(X) \subset \varphi(Y)$.
D'après le lemme précédent, il existe une partie E de A telle que $\varphi(E) = E$. On pose alors $A_1 = E$. On a donc $A_1 = A - g < B - f < A_1 > >$ d'où $A - A_1 = A - (A - g < B - f < A_1 > >) = g < B - f < A_1 > >$

On peut alors poser $A_2 = A - A_1$; $B_1 = f < A_1 >$; $B_2 = B - f < A_1 >$. On a alors $B_2 = B - B_1$ et $A_2 = g < B_2 >$. CQFD.

THÉORÈME *de Cantor-Bernstein*
Étant donnés deux ensembles A et B, s'il existe une injection f de A dans B et une injection g de B dans A, alors A et B sont équipotents.

Démonstration :
D'après le lemme précédent, il existe deux parties A_1 et A_2 de A et deux parties B_1 et B_2 de B telles que :
$A_2 = A - A_1$; $B_2 = B - B_1$; $B_1 = f < A_1 >$; $A_2 = g < B_2 >$.

On notera par f' la restriction de f à A_1 et par g' la restriction de g à B_2. Il est clair que f' est une bijection de A_1 sur B_1 tandis que g' est une bijection de B_2 sur A_2. Ceci nous suggère alors de définir une application h de A dans B telle que pour tout $x \in A$:

- Si $x \in A_1$ alors $h(x) = f'(x)$.
- Si $x \in A_2$ alors $h(x) = g'^{-1}(x)$.

Comme A_1 et A_2 sont disjoints, de même que B_1 et B_2, il est alors évident que h est une bijection de A sur B.

b. Axiome du choix

1) Condition d'existence d'un bon ordre sur un ensemble

Étant donné un ensemble a (et à fortiori une collection) quelconque, rien ne permet pour l'instant d'affirmer l'existence d'un bon ordre sur a. Le théorème suivant énonce une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un tel bon ordre.

THÉORÈME 1
Un ensemble a peut être bien ordonné si et seulement s'il existe une application h de $\mathcal{P}(a) - \{\emptyset\}$ dans a telle que pour tout $x \in \mathcal{P}(a) - \{\emptyset\}$, $h(x) \in x$.

Démonstration :
Supposons qu'il existe un bon ordre r sur a. Alors on définit l'application h de $\mathcal{P}(a) - \{\emptyset\}$ dans a telle que pour tout $x \in \mathcal{P}(a) - \{\emptyset\}$, $h(x)$ soit le plus petit élément de x (selon r) ; elle possède la propriété cherchée.

Réciproquement, supposons qu'il existe une application h de $\mathcal{P}(a) - \{\emptyset\}$ dans a telle que pour tout $x \in \mathcal{P}(a) - \{\emptyset\}$, $h(x) \in x$. On définit l'application

$$g : \mathcal{P}(a) - \{a\} \longrightarrow a, \quad x \longmapsto g(x) = h(a - x)$$

On a donc $g(x) \notin x$, pour tout $x \in \mathcal{P}(a) - \{a\}$. Soit un ensemble quelconque u n'appartenant pas à a (il en existe puisque la collection des ensembles n'est pas un ensemble). On définit par induction une application F de On dans $a \cup \{u\}$ par :
$F(\alpha) = g(F\langle\alpha\rangle)$ si $F\langle\alpha\rangle \in \mathcal{P}(a) - \{a\}$;
$F(\alpha) = u$ si $F\langle\alpha\rangle \notin \mathcal{P}(a) - \{a\}$.

Supposons que pour tout ordinal α, $F(\alpha) \in a$. Alors, cela signifie que pour tout α, $F\langle\alpha\rangle \in \mathcal{P}(a) - \{a\}$. De plus on a $g(F\langle\alpha\rangle) \notin F\langle\alpha\rangle$, c'est-à-dire $F(\alpha) \notin F\langle\alpha\rangle$, ce qui signifie que si $\beta < \alpha$, alors $F(\beta) \neq F(\alpha)$. Par conséquent F est une injection de On dans a, ce qui veut dire que F est une bijection de On sur $b = F\langle On\rangle \subset a$. Par conséquent, d'après le schéma de remplacement, $F^{-1}(b) = On$ est un ensemble, ce qui est impossible.

Il existe donc un ordinal α tel que $F(\alpha) = u$; soit α_0 le plus petit ordinal de ce genre. On a alors $F(\beta) \in a$ pour tout $\beta < \alpha_0$, c'est-à-dire $F\langle\alpha_0\rangle \subset a$. Et puisque $F(\beta) = g(F\langle\beta\rangle) \notin F\langle\beta\rangle$ pour tout $\beta < \alpha_0$, on a donc pour tout $\gamma < \beta$, $F(\gamma) \neq F(\beta)$, ce qui montre que $F \mid \alpha_0$ est une injection de α_0 sur a. Or $F\langle\alpha_0\rangle \subset a$; mais $g(F\langle\alpha_0\rangle) = F(\alpha_0) = u$ implique que $F\langle\alpha_0\rangle \notin \mathcal{P}(a) - \{a\}$, et par conséquent $F\langle\alpha_0\rangle = a$, et donc $F \mid \alpha_0$ est une bijection de α_0 sur a. Le lemme 8 [II. 3. c] montre que cette bijection définit une relation de bon ordre sur a. CQFD.

Ce théorème ne prétend pas que tout ensemble quelconque satisfait la condition qu'il énonce. L'affirmation selon laquelle cette condition est vérifiée par tout ensemble constitue un des multiples énoncés de l'axiome du choix.

2) Les différentes formulations de l'axiome du choix

AXIOME 6 *Axiome du choix* (AC)
Pour tout ensemble a dont les éléments sont non vides et deux à deux disjoints , il existe un ensemble c

possédant un élément et un seul dans chaque élément de a (c'est-à-dire tel que pour tout $u \in a$, $c \cap u$ soit un singleton). Cet ensemble c est appelé un *choix* sur a.

Les énoncés suivants sont équivalents (avec le concours des autres axiomes) à l'axiome du choix :

AC' : Pour tout ensemble a , il existe une application h de $\mathcal{P}^*(a) = \mathcal{P}(a) - \{\emptyset\}$ dans a telle que pour tout
$x \in \mathcal{P}^*(a)$, $h(x) \in x$. (Autrement dit, tout ensemble satisfait la condition du théorème 1)

AC" : Le produit d'une famille d'ensembles non vides est non vide.

Prouvons les équivalences AC $\Leftrightarrow$ AC' $\Leftrightarrow$ AC".

AC' $\Rightarrow$ AC :
Si AC' est vrai, alors considérons un ensemble a dont les éléments sont non vides et deux à deux disjoints.
Soit $b =$ réu(a) ; il existe alors une application h de $\mathcal{P}^*(b) = \mathcal{P}(b) - \{\emptyset\}$ dans b telle que pour tout $x \in \mathcal{P}^*(b)$, $h(x) \in x$. Tout élément de a est une partie non vide de b , c'est-à-dire un élément de $\mathcal{P}^*(b)$.
On considère alors $c = \{h(x) ; x \in a\}$. Soit $u \in a$; alors $h(u) \in c$ et aussi $h(u) \in u$, et donc $h(u) \in c \cap u$. Supposons qu'il existe $z \in c \cap u$, $z \neq h(u)$. Comme $z \in c$, il existe donc $v \in a$ tel que $z = h(v)$. $z \in u$ implique $h(v) \in u$; et $v \in a$ implique $h(v) \in v$ et par conséquent $h(v) \in u \cap v$. On a donc $u \cap v \neq \emptyset$, ce qui est une contradiction puisque les éléments de a sont deux à deux disjoints. Donc $h(u)$ est le seul élément de $c \cap u$, ce qui montre que AC est vrai.

AC $\Rightarrow$ AC" :
Considérons une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'ensembles non vides. Pour chaque $i \in I$, on forme l'ensemble $b\mathrm{i} = \{ (i , x) ; x \in a_i \}$, qui est non vide. L'ensemble $B = \{ b\mathrm{i} ; i \in I \}$ a ses éléments deux à deux disjoints puisque si $i \neq j$, alors un élément (i , x) de $b\mathrm{i}$ est toujours différent d'un élément (j , y) de $b\mathrm{j}$.
Si AC est vrai, alors il existe un ensemble c tel que pour tout $i \in I$, $c \cap b\mathrm{i}$ ait un seul élément (i, u_i).
c est donc par définition la famille $(u_i)_{i\in I}$, qui est un élément du produit $\prod_{i\in I} a_i$, ce qui montre que ce produit est non vide. Par conséquent AC" est vrai.

AC" $\Rightarrow$ AC' :
Considérons un ensemble quelconque a et $A = \mathcal{P}(a) - \{\emptyset\}$ et la famille identité $(i)_{i\in I}$. C'est donc une famille d'ensembles non vides, et par conséquent, si AC" est vrai, son produit $\prod_{x\in A} x$ est non vide.

Soit alors un élément h de ce produit. On a bien entendu pour tout $x \in A = \mathcal{P}(a) - \{\emptyset\}$, $h(x) \in x$, ce qui montre que AC' est vrai. CQFD.

L'énonce suivant est lui aussi équivalent à l'axiome du choix.

THÉORÈME 2
Tout ensemble est équipotent à un ordinal.

En effet, soit un ensemble a. Cet énoncé implique que a peut être muni d'un bon ordre (lemme 8 [II. 3. c]) et par conséquent (théorème 1) que AC' est satisfait. Inversement, si AC' est satisfait, le même théorème (voir sa démonstration) montre que a est équipotent à un ordinal.

Corollaire : *Théorème de Zermelo*
Tout ensemble peut être bien ordonné.

Un ensemble est dit *fini* s'il est équipotent à un ordinal fini. Autrement, il est dit *infini*.

c. Propriétés élémentaires des collections cardinales

On dira d'une collection ordinale α qu'elle est *cardinale* si elle n'est équipotente à aucun de ses éléments. Si en particulier α est un ordinal, alors on dit que α est un *cardinal*. Il est facile de vérifier que les ordinaux 0, 1, 2, … etc. sont des cardinaux. Soit un ensemble a. Le plus petit ordinal α équipotent à a est appelé le *cardinal* de a, et on le note **Card(*a*)** ou **Card *a*** . Si α est cardinal, il est donc évident que Card $\alpha = \alpha$.

Il est clair qu'aucun élément de *On*, donc aucun ordinal, ne peut être équipotent à *On*. Le schéma de remplacement impliquerait alors que *On* est un ensemble. *On* est donc une collection cardinale. Si une collection A est équipotente à *On*, on écrira Card A = *On*. En particulier, on a Card *On* = *On* .

Pour tout ordinal α, Card $\alpha \leq \alpha$. En effet si Card $\alpha > \alpha$, comme α est équipotent à α, cela contredirait le fait que Card α est, par définition, le plus petit ordinal équipotent à α.

Un cardinal est dit fini (resp. infini) s'il est fini (resp. infini) en tant qu'ordinal.

Lemme 1
Soient α et β deux cardinaux. Si α inj β , alors $\alpha \leq \beta$.

En effet, si $\alpha > \beta$, alors $\beta \subset \alpha$ donc β inj α , ce qui d'après le théorème de Cantor-Bernstein implique que α éqp β, ce qui contredit le fait que α est un cardinal. CQFD.
On en déduit que si α inj β et β inj α, alors $\alpha = \beta$.

Lemme 2
Soient a et b deux ensembles. On a : Card $a \leq$ Card $b \Leftrightarrow a$ inj b

En effet, Card $a \leq$ Card $b \Rightarrow$ Card $a \subset$ Card $b \Rightarrow$ Card a inj Card b. Comme par définition Card a éqp a et Card b éqp b , on a donc: a inj Card a inj Card b inj b , donc a inj b.
Réciproquement, comme a inj Card a et b inj Card b, on a donc : a inj $b \Rightarrow$ Card a inj Card b donc d'après le lemme 1 on a Card $a \leq$ Card b.

Lemme 3
La réunion d'une collection de cardinaux est une collection cardinale.

Soit une collection X de cardinaux et α = réu (X). L'ordinal α est la borne supérieure de X. Supposons que α est équipotent à un de ses éléments β. $\beta \in \alpha$ donc β appartient à un élément γ de X. On a donc α éqp β et $\beta \subset \gamma$ donc α inj γ . D'autre part on a $\gamma \subset \alpha$, donc γ inj α , donc α éqp γ. Comme α éqp β, on a donc aussi γ éqp β, ce qui contredit le fait que γ est un cardinal (puisqu'il est équipotent à son élément β). C.Q.F.D.

On en déduit le

Lemme 4
La collection, notée ***Cn*** , des cardinaux n'est pas un ensemble.

Car si cette collection était un ensemble X, la réunion κ de X serait un cardinal. Tout ordinal est alors équipotent à une partie de κ . Soit B la collection des bons ordres r sur une partie a de κ. Comme r est une partie de a^2, on a donc aussi $r \subset \kappa^2$, donc $r \in \mathcal{P}(\kappa^2)$, donc B est un ensemble. Soit un ordinal α et f une bijection de α sur une partie a de κ. Dans ce cas, f induit sur a un bon ordre r dont le type est α . On peut définir l'application τ de B dans *On*, qui à tout élément r de B associe le type de r. Il est clair que Im $\tau = \tau < B > =$ *On* puisque tout ordinal est un type d'ordre. Comme B est un ensemble, il en résulte que *On* est un ensemble, ce qui est impossible.

IV - Axiome des univers

1. Notion d'univers

Nous pouvons maintenant introduire la notion clef de cette théorie, celle d'univers.

a) Définition

On dit d'un ensemble U qu'il est un *univers* s'il vérifie les conditions suivantes :

(U_1) U est transitif
(U_2) $(\forall x \in U)[\mathcal{P}(x) \in U]$
(U_3) $(\forall x \in U)[$ réu $(x) \in U]$
(U_4) Pour toute fonction f dans U et pour tout $a \in U$, $f < a > \in U$.

L'ensemble vide $\varnothing$ est un univers trivial. C'est pour l'instant le seul ensemble qui soit un univers. Si on étend cette définition aux collections, on voit qu'à l'autre « extrémité » on a $\mathcal{U}$ qui est un univers, au sens défini ici. On verra que c'est le seul univers qui ne soit pas un ensemble. L'axiome qui suit introduira, entre ces deux extrêmes, des univers intermédiaires. La collection des univers notée $\mathcal{U}\boldsymbol{n}$.

b) Axiome des univers

AXIOME
Tout ensemble appartient à un univers.

En particulier, $\varnothing$ appartient à un univers U. (U_2) montre qu'alors $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ est aussi un élément de U, et par conséquent $\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ etc. On a donc au moins un ensemble à deux éléments $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$ qui est un élément de U et une partie de U. On a le

Lemme 1
Pour deux éléments a et b d'un univers U, la paire $\{a, b\}$ est un éléments de U.

En effet, on a l'application f de $\{0, 1\}$ dans U définie par $f(0) = a$ et $f(1) = b$. D'après (U_4), $f < \{0, 1\} > = \{a, b\}$ appartient à U.

La conséquence immédiate de ce lemme est que la réunion $a \cup b$ de deux éléments a et b de U est un élément de U. En effet, $a \cup b =$ réu$(\{a, b\}) \in U$ (d'après (U_3)).

c) Théorème de l'infini. L'ordinal ω

Lemme 2
$\varnothing$ appartient à tout univers non vide U.

En effet, soit a un élément quelconque de U. D'après (U_2), $\mathcal{P}(a) \in U$. Or $\varnothing \in \mathcal{P}(a)$. ($U_1$) implique alors que $\mathcal{P}(a) \subset U$, et donc que $\varnothing \in U$.

THÉORÈME 1 : *Axiome de l'infini*
Il existe un ensemble inductif

En effet, soit un univers non vide U . On sait déjà que $\varnothing \in U$. Soit $a \in U$. Le lemme 1 montre que $\{a\} \in U$ et le lemme 1 montre que $a \cup \{a\} \in U$.

En fait, on vient précisément de montrer que tout univers non vide U est inductif. En particulier, les ordinaux finis appelés entiers intuitifs 0, 1, 2, 3, … etc. sont des éléments de U .

Corollaire
Il existe un plus petit ensemble inductif, noté $\boldsymbol{\omega}$.

Découle directement du lemme 2 [II.1.a] et du théorème ci-dessus.

THÉORÈME 2
ω est un ordinal infini et ses éléments sont les ordinaux finis.

En effet, considérons l'ensemble $\omega' = \{x \in \omega ;\ x$ est un ordinal fini $\}$. On a $0 \in \omega'$. Et si $\alpha \in \omega'$, alors $\alpha \in \omega$ et α est un ordinal fini ; ω étant inductif, $\alpha \in \omega$ implique $\alpha \cup \{\alpha\} \in \omega$; et α étant un ordinal fini il en est de même pour $\alpha +1 = \alpha \cup \{\alpha\}$; par conséquent, $\alpha \cup \{\alpha\} \in \omega'$.
ω' est donc un ensemble inductif, d'où $\omega \subset \omega'$ (puisque ω est le plus petit ensemble inductif) et donc $\omega' = \omega$. ω est donc un ensemble d'ordinaux (en l'occurrence d'ordinaux finis). Il est bien évidemment transitif puisque les ordinaux $<$ à un ordinal fini sont aussi finis (lemme 8 [II. 3. a]). Par conséquent ω est un ordinal. Il n'a pas de prédécesseur; en effet, si α est le prédécesseur de ω, alors $\alpha \in \omega$ et donc $\omega = \alpha + 1 \in \omega$, ce qui est impossible. Montrons pour terminer que *tout* ordinal fini est élément de ω. Supposons qu'il existe un ordinal fini α qui n'appartienne pas à ω. On a donc $\alpha \geq \omega$, ce qui implique immédiatement que ω est fini (puisqu'on a soit $\omega = \alpha$, soit $\omega < \alpha$). CQFD.

ω est donc le plus petit ordinal infini. C'est aussi évidemment le plus petit cardinal infini puisque tout ordinal $< \omega$ est fini. Les éléments de ω sont généralement notés par les lettres m , n , k , p etc.

Principe de démonstration ou de définition par récurrence sur $\boldsymbol{\omega}$

Le raisonnement par récurrence, qui caractérise le concept intuitif d'*entier naturel*, est la considération par excellence qui justifie le fait que la notion d'ordinal fini remplace celle d'entier intuitif.

THÉORÈME 3
Soit une collection P . Si $0 \in P$ et si pour tout $n \in \omega$, $n \in P \Rightarrow n+1 \in P$, alors $\omega \subset P$.

Autrement dit, si une propriété est vraie pour 0, et si l'hypothèse de sa véracité pour un entier n entraîne sa véracité pour $n+1$, alors cette propriété est vraie pour tout entier. En effet supposons qu'elle soit fausse pour au moins un certain entier; soit alors n_0 le plus petit entier de ce genre. On a $n_0 \neq 0$ puisque $0 \in P$.
n_0 a donc un prédécesseur m_0 . On a alors $m_0 \in P$ donc $m_0 +1 = n_0 \in P$, ce qui est une contradiction.

Utilisons ce théorème pour montrer que

THÉORÈME 4
Tout ordinal fini est un cardinal.

0 est bien sûr un cardinal. Supposons que n soit un cardinal ; montrons qu'alors $n+1$ l'est aussi.
Soit un entier $m < n+1$. Si $m = 0$ il est clair que $n+1$ (qui n'est pas vide) ne peut être équipotent à m (qui est vide). Donc $m = k+1$. Comme $m < n+1$, on a donc $k+1 < n+1$ et donc $k < n$.
Supposons qu'il existe une bijection φ de $n+1$ sur $k+1$; montrons qu'il existe alors une bijection ψ de $n+1$ sur $k+1$ tel que $\psi(n) = k$. En effet, si $\varphi(n) = k$, alors φ est la bijection cherchée. Et si $\varphi(n) \neq k$, comme φ est bijective, soient alors $k' \in k+1$ tel que $\varphi(n) = k'$ et $n' \in n+1$ tel que $\varphi(n') = k$. On construit alors par permutation des images de n et n' la bijection ψ de $n+1$ sur $k+1$ en posant : $\psi(n) = k$ et $\psi(n') = k'$ et pour tout $x \notin \{n, n'\}$, $\psi(x) = \varphi(x)$.
Mais l'existence de cette bijection ψ est alors incompatible avec le fait que n soit un cardinal. En effet, il est clair que $\psi \mid n$ est une bijection de n sur k , ce qui est impossible puisque $k < n$. Par conséquent, il n'existe pas de bijection de $n+1$ sur un ordinal $m < n+1$, donc $n+1$ est un cardinal. CQFD.

2. Propriétés fondamentales des univers

Outre le fait qu'ils introduisent les ensembles infinis, en particulier le cardinal infini ω, examinons un certain nombre des autres propriétés élémentaires des univers, ce qui justifiera l'appellation "univers".

a) Les univers satisfont les axiomes de base

Considérons un univers non vide U . Appelons *ensemble au sens de U* ou U-ensemble un élément de U. Étant donné un U-ensemble a, par U-élément de a on entendra un U-ensemble appartenant à a. « x est un U-élément de y » est donc défini dans $\mathcal{U}$ par la relation $x\in U$ **et** $y\in U$ **et** $x \in y$.
Par U-partie de a on voudra signifier un U-ensemble dont tout U-élément est un U-élément de a. Mais le fait que U soit transitif simplifie les propos. Ainsi, si a est un U-ensemble, les éléments de a (au sens de l'univers $\mathcal{U}$) sont tous des U-ensembles, donc un U-élément de a sera tout simplement un élément de a. Par conséquent, une U-partie de a sera une partie de a qui est un U-ensemble. Or $\mathcal{P}(a)$ est aussi un U-ensemble et donc toute partie de a l'est ; donc une U-partie de a sera simplement une partie de a (au sens de l'univers $\mathcal{U}$).

Voyons en quoi doit consister un U-énoncé. Soit un énoncé $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dont tous les paramètres ont des U-ensembles. L'énoncé noté $E_U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, appelé interprétation de $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans U ou énoncé $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ relativisé à U, est celui obtenu en remplaçant dans $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tout quantificateur $\exists x$ par $\exists x \in U$, autrement dit, « il existe un ensemble » relativisé à U doit se lire « il existe un U-ensemble ». Cela a pour conséquence que le quantificateur $\forall x$, « pour tout ensemble » relativisé à U devient $\forall x \in U$, « pour tout U-ensemble ». Ainsi donc, l'énoncé $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ interprété dans U est défini dans $\mathcal{U}$ par l'énoncé $E'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: $x_1 \in U$ **et** $x_2 \in U$ **et** … **et** $x_n \in U$ **et** $E_U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ appelé le U-énoncé de $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Soient alors des U-ensembles $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Alors dire que l'énoncé $E(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, interprété dans U , est vrai revient à dire que l'énoncé $E'(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est vrai dans $\mathcal{U}$.
Par exemple, considérons l'énoncé $E(z)$: $\forall x\exists y(y \neq a$ **et** $x \in y$ **et** $z\in y)$ dans lequel le paramètre a est un U-ensemble. Cet énoncé interprété dans U veut dire « pour tout U-ensemble x, il existe un U-ensemble y différent de a , ayant x comme élément et ayant aussi z comme élément ». $E_U(z)$ est donc l'énoncé $(\forall x\in U)(\exists y\in U)(y \neq a$ **et** $x \in y$ **et** $z\in y)$. Par conséquent, l'énoncé $E'(z)$:
$z\in U$ **et** $(\forall x\in U)(\exists y\in U)(y \neq a$ **et** $x \in y$ **et** $z\in y)$ est la définition dans $\mathcal{U}$ de cette l'interprétation dans U.
Soit un U-ensemble b; $E'(b)$ est alors $b\in U$ **et** $(\forall x\in U)(\exists y\in U)(y \neq a$ **et** $x \in y$ **et** $b\in y)$ qui s'écrit plus simplement $(\forall x\in U)(\exists y\in U)(y \neq a$ **et** $x \in y$ **et** $b\in y)$. L'énoncé $\forall x\exists y(y \neq a$ **et** $x \in y$ **et** $b\in y)$ est vrai dans $\mathcal{U}$, car (en admettant pour l'instant que $a \notin a$) , pour tout ensemble x, il suffit de prendre pour y l'ensemble $\{a, b, x\}$. Dire que cet l'énoncé interprété dans U est vrai revient à dire que son U-énoncé $(\forall x\in U)(\exists y\in U)(y \neq a$ **et** $x \in y$ **et** $b\in y)$ est vrai dans $\mathcal{U}$. En l'occurrence, c'est le cas puisque pour tout U-ensemble x , $\{a, b, x\}$ est aussi un U-ensemble.

Soit une relation binaire $R(x, y)$ dont les paramètres sont des U-ensembles. L'interprétation de $R(x, y)$ dans U est définie dans $\mathcal{U}$ par l'énoncé $R'(x, y)$: $x \in U$ **et** $y \in U$ **et** $R_U(x, y)$, qui est la U-relation binaire de $R(x, y)$.

De même, soit une collection $A(x)$ dont les paramètres sont des U-ensembles. L'interprétation de $A(x)$ dans U est définie dans $\mathcal{U}$ par l'énoncé $A'(x)$: $x \in U$ **et** $A_U(x)$, qui est la U-collection de $A(x)$. Il s'agit là d'une définition au sens strict d'une U-collection. Par exemple, on vérifie que tout élément a de U est une U-collection. En effet, l'énoncé $x \in a$ à paramètre dans U est (interprété dans U) défini dans $\mathcal{U}$ par la U-collection $x \in U$ **et** $x \in a$, qui à cause de la transitivité de U est simplement équivalent à la collection $x \in a$, savoir a. On notera qu'une U-collection est une partie de U. Mais, à priori, on ne peut affirmer la réciproque, savoir qu'une partie de U est obligatoirement une U-collection. C'est là une des différences entre le travail dans un univers U et le travail dans $\mathcal{U}$. En effet, une partie de $\mathcal{U}$ (autrement qu'au sens intuitif) est définie par un énoncé à une variable libre, c'est-à-dire par une $\mathcal{U}$ -collection (que nous avons simplement appelée collection). La raison en est que $\mathcal{U}$ n'est pas supposé appartenir à un autre univers de référence, ce qui est le cas d'un univers U qui est lui un élément de $\mathcal{U}$, et qui plus est, d'après l'axiome des univers, un élément d'un autre univers U'. On peut donc parler de partie de U (au sens de $\mathcal{U}$) sans se soucier de savoir s'il s'agit ou non d'une U-collection au sens stricte. On appellera donc U-collection (au sens large) toute partie de U.

Proposition 1
U satisfait l'axiome de l'ensemble vide

Dire que U satisfait l'axiome de l'ensemble vide c'est affirmer qu'il existe un U-ensemble n'ayant aucun U-élément. U étant non vide, on a vu que $\varnothing \in U$. $\varnothing$ est donc un U-ensemble n'ayant aucun élément et par conséquent aucun U-élément.

Proposition 2
U satisfait l'axiome de l'axiome d'extensionalité.

Il s'agit de vérifier que deux U-ensembles ayant les mêmes U-éléments sont égaux. Mais comme leurs U-éléments sont aussi leurs éléments, l'axiome d'extensionalité dans l'univers $\mathcal{U}$ implique le même axiome dans U.

Proposition 3
U satisfait l'axiome de l'axiome de l'ensemble des parties.

Cet axiome s'énonce dans U : pour tout U-ensemble a, il existe un U-ensemble b dont les U-éléments sont les U-parties de a.

Il est clair que $\mathcal{P}(a)$ a les propriétés de l'U-ensemble b.

Proposition 4
U satisfait l'axiome de la réunion.

Cet axiome s'énonce dans U : pour tout U-ensemble a, il existe un U-ensemble b dont les U-éléments sont les U-éléments des U-éléments de a.

On vérifie aisément réu(a) a les propriétés de l'U-ensemble b.

Proposition 5
U satisfait le schéma de remplacement.

Soit une relation binaire $F(x, y)$ dont les paramètres sont des U-ensembles et qui interprété dans U est fonctionnelle. Cette relation est définie dans $\mathcal{U}$ par l'énoncé $x \in U$ **et** $y \in U$ **et** $F_U(x, y)$, notée $F'(x, y)$.
On a $\mathrm{Dom}\, F' \subset U$ et $\mathrm{Im}\, F' \subset U$; F' est donc une application d'une partie de U dans U (c'est-à-dire une fonction dans U). Soit alors un U-ensemble a. Alors d'après (U_4), $F' < a >$ est un U-ensemble, ce qui montre que U satisfait le schéma de remplacement.

Appelons *modèle de base* toute collection M (au sens intuitif du terme) d'objets munie d'une relation binaire ε (là aussi au sens intuitif du terme) appelée relation d'appartenance de M vérifiant ces 5 axiomes. On appelle modèle de Zermelo-Fraenkel (en abrégé *ZF*) un modèle de base qui vérifie en plus l'axiome de l'infini. Nous venons de montrer que tout univers non vide muni de la relation d'appartenance $\in$ de $\mathcal{U}$ est un modèle de base. Et il est aisé de vérifier que tout univers ayant ω comme élément est un modèle de *ZF*. Il en existe puisque l'axiome de l'univers affirme que tout ensemble appartient à un univers.

Le fait qu'un univers non vide U vérifie les axiomes d'un modèle de base lui confère toutes les propriétés de $\mathcal{U}$ que l'on peut obtenir sur la base de ces 5 axiomes. Par conséquent, tout ce que nous avons dit avant II. 5, hormis II. 4. b (plus précisément hormis tout les résultats dépendant de l'axiome du choix) est applicable à U. Il suffit pour cela de remplacer dans les propos $\mathcal{U}$ par U , "collection" par "U-collection" (au sens strict), "ensemble" par "U- ensemble", bref de considérer qu'on travaillait dans U et non dans $\mathcal{U}$. Les premiers énoncés des lemmes 1 à 8 qui suivent sont quelques exemples de cette transposition qu'il est inutile de démontrer puisqu'elles sont communes à tous les modèles de base. Mais les univers autorisent des énoncés plus généraux que nous démontrerons. Ils sont sans doute de plus grand intérêt pratique car ce sont des énoncés de l'univers de référence $\mathcal{U}$; de ce fait, ils nous affranchissent dans une très large mesure de considérations techniques plus ou moins complexes liées à l'obligation d'interpréter différemment les énoncés lorsqu'on se place dans un univers U.

Lemme 1
« Si a et b sont des *U*-ensembles, alors la paire $\{ a, b \}$ est un *U*-ensemble ».

Nous avons déjà démontré que cet énoncé est vrai dans *U*. Mais ce résultat se déduit directement ce que, comme $\mathcal{U}$, U est un modèle de base. On en déduit que le couple (a, b) est un *U*-ensemble.

Lemme 2
« Le produit $a \times b$ de deux *U*-ensembles a et b est un *U*-ensemble ».

Lemme 3
« La réunion d'une *U*-famille de *U*-ensembles indexée par un *U*-ensemble est un *U*-ensemble ».
Plus généralement, la réunion d'une famille quelconque de *U*-ensembles indexée par un *U*-ensemble est un *U*-ensemble.

En effet, soit $(a_i)_{i\in I}$ une telle famille; d'après (U_4), l'image de cette famille $a< I > = \{a_i\}_{i\in I}$ est un *U*-ensemble. Et (U_3) implique qu'alors réu$(\{a_i\}_{i\in I})$ est un *U* –ensemble.

Lemme 4
« L'intersection d'une *U*-famille non vide de *U*-ensembles indexée par une *U*-collection (au sens strict) est un *U*-ensemble ».
Plus généralement, l'intersection d'une famille non vide quelconque de *U*-ensembles indexée par une collection quelconque I est un *U*-ensemble.

En effet, soit $(a_i)_{i\in I}$ une telle famille et soit $u \in I$; l'intersection de cette famille est bien sûr une partie de l' *U*-ensemble a_u ; or toute partie d'un *U*-ensemble est un *U*-ensemble.

Lemme 5
« Toute *U*-fonction f d'un *U*-ensemble a dans une *U*-collection (au sens strict) B est un *U*-ensemble ».
Plus généralement, toute fonction f d'un *U*-ensemble a dans une *U*-collection B au sens large (c'est-à-dire une partie quelconque B de U) est un *U*-ensemble.

En effet, f est une application d'une partie a' de a dans B et on a $f \subset a' \times f < a'>$ qui est un *U*-ensemble (puisque a' et $f < a'>$ le sont).

Lemme 6
« L'ensemble des *U*-applications d'un *U*-ensemble a dans un *U*-ensemble b est un *U*-ensemble, de même que l'ensemble des *U*-fonctions d'un *U*-ensemble a dans un *U*-ensemble b ».
Plus généralement, l'ensemble b^a des applications d'un *U*-ensemble a dans un *U*-ensemble b est un *U*-ensemble, de même que l'ensemble des fonctions d'un *U*-ensemble a dans un *U*-ensemble b.

En effet, b^a est une partie de $\mathcal{P}(a \times b)$, qui est un *U*-ensemble. Et l'ensemble des fonctions de a dans b est la réunion de la famille $(b^i)_{i \subset a}$ de *U*-ensembles indexée par l'*U*-ensemble $\mathcal{P}(a)$.

Lemme 7
« Le produit d'une *U*-famille de *U*-ensembles indexée par un *U*-ensemble est un *U*-ensemble ».
Plus généralement, le produit d'une famille quelconque de *U*-ensembles indexée par un *U*-ensemble est un *U*-ensemble.

En effet, si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de *U*-ensembles indexée par un *U*-ensemble , en désignant par A la réunion de cette famille (qui on l'a vu est un *U*-ensemble), $\prod_{i\in I} a_i$ est une partie de l'*U*-ensemble A^I et donc c'est un *U*-ensemble.

Lemme 8
« U n'est pas un *U*-ensemble ».

Même s'il se déduit du cas de $\mathcal{U}$, démontrons-le néanmoins. L'ensemble $a = \{x \in U ; x \notin x \}$ n'est pas un *U*-ensemble sinon on aurait évidemment $a \in a \Leftrightarrow a \notin a$. Et si U était un *U*-ensemble, comme a est une partie de U, a serait donc un U-ensemble. CQFD.

Toute partie de U qui n'est pas un U-ensemble est appelée une *U-transcollection* (au sens large).

En particulier, ce lemme montre que U est une U-transcollection de U. C'est même une U-transcollection au sens strict ; en effet, U est la U-collection stricte $x \in U$ **et** $x = x$ qui est la définition dans $\mathcal{U}$ de l'énoncé $x = x$ interprété dans U.

De même soit $\theta = On_U$ l'ensemble des ordinaux appartenant à U. Montrons que θ est une U-transcollection. En effet, la transitivité de U implique que θ est une collection transitive d'ordinaux donc est un ordinal. Si $\theta \in U$, alors on aurait $\theta \in \theta$ (puisque θ est par définition l'ensemble des ordinaux de U), ce qui est impossible. On notera que cette démonstration est valable aussi pour le cas particulier $U = \varnothing$.

b) Univers engendré par un ensemble

THÉORÈME
L'intersection d'une famille non vide d'univers est un univers.

En effet, soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'univers indexée par une collection quelconque non vide I et soit u l'intersection de cette famille. u est alors évidemment un ensemble. Montrons que c'est un univers.

- u est transitif car c'est l'intersection d'une famille non vide d'ensembles transitifs (lemme [II. 1. b])
- Soit $x \in u$; pour tout $i \in I$, $x \in U_i$ donc $\mathcal{P}(x) \in U_i$, donc $\mathcal{P}(x) \in u$.
- Soit $x \in u$; pour tout $i \in I$, $x \in U_i$ donc réu$(x) \in U_i$, donc réu$(x) \in u$.
- Soit une fonction f dans u et soit $a \in u$; pour tout $i \in I$, $u \subset U_i$, donc f est une fonction dans U_i ; mais on a aussi $a \in U_i$ donc $f < a > \in U_i$, et par conséquent $f < a > \in u$.

On en déduit immédiatement que

Corollaire 1
L'intersection de toute collection non vide d'univers est un univers.

Corollaire 2
Pour tout ensemble a, il existe un plus petit univers u incluant a. On dit alors que u est *engendré* par a et on note $\mathcal{U}(a) = u$.

En effet, d'après l'axiome des univers, a appartient à un univers, donc a inclus dans un univers; l'intersection de la collection des univers incluant a possède donc la propriété cherchée.

Le plus petit univers dont a est un élément est bien entendu l'univers $\mathcal{U}(\{a\})$ qui est noté $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(a)$. On l'appelle l'univers *amorcé* par a. En fait, on a défini une application $\mathcal{U}$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}n$ qui à tout ensemble a associe l'univers $\mathcal{U}(a)$ qu'il engendre…

…
Interruption de la révision de 2003 de la Théorie des univers
Fin de la période du schème, le 15 août 2003
Changement radical dans la manière de concevoir les ensembles
et de traiter des ensembles
Evolution vers la Théorie universelle des ensembles.

C – 2004, la Théorématique

La Théorie universelle des ensembles

2004, la Théorématique

I - La Théorie théorématique des ensembles

1- Les faiblesses de l'axiomatique

C'est **Georg Cantor** qui introduisit la **théorie des ensembles** en 1882. La notion d'**ensemble** se révéla être un concept très puissant, avec lequel il y a désormais un réel espoir d'unifier la totalité des mathématiques. En effet, la théorie des ensembles produit en son sein tous les concepts des mathématiques usuelles.

Mais cette théorie a aussi la remarquable propriété de mettre en lumière tous les problèmes des fondements de la logique et des mathématiques. Et au-delà, cette théorie révèle les problèmes des fondements de l'ensemble des sciences. Tous ces problèmes des fondements se présentent sous forme de divers paradoxes.

Cantor utilisait la notion d'**ensemble** dans son sens le plus **général**, **intuitif**, **naturel**. « *Par **ensemble**, on entend un **groupement** en **un tout** d'**objets** bien **distincts** de notre **intuition** ou de notre **pensée***», disait-il. Il utilisait donc la notion d'**ensemble** sans aucune restriction ou **axiomatique**.

On qualifie de « naïf » un tel usage du mot **ensemble**. Et on pense que c'est cet usage « naïf » qui est la cause des paradoxes, qu'il faut donc restreindre l'usage de ce terme, en lui donnant un sens purement **axiomatique**. La notion d'ensemble obéirait alors à un système d'axiomes choisis pour éviter les paradoxes. C'est ce qui fut fait avec la **Théorie axiomatique des ensembles** (1922), la théorie de référence étant celle de Zermelo-Fraenkel (ZF).

La **Théorie universelle des ensembles** ou **Théorie théorématique des ensembles** que je vais présenter ici est l'alternative à la **Théorie axiomatique des ensembles**, pour résoudre les problèmes des fondements de la logique, des mathématiques et des sciences.

D'abord au terme « naïf » utilisé pour qualifier l'usage que Cantor faisait de la notion d'**ensemble**, je préfère maintenant le terme de « **natif** ». Ceci pour supprimer toute connotation péjorative contenue dans le mot « **naïf** ». Cette substitution est purement psychologique et symbolique. Elle s'inscrit dans le souci de faire comprendre que j'opère un changement radical de **paradigme** scientifique. J'abandonne l'approche **axiomatique** des choses, pour une nouvelle approche, une nouvelle méthodologie : la **théorématique**.

Ce terme « **théorématique** » n'est pas à comprendre au sens actuel, mais en un sens nouveau dans lequel j'invite à entrer. La méthode **axiomatique** (ou « **formelle** ») consiste à poser les termes et les relations premières, puis des énoncés (ou « formules) premiers, appelés justement les **axiomes**. Ce sont les « **théorèmes** » premiers, posés comme tels, sans démonstration. C'est la faiblesse première de l'**axiomatique**, inhérente à cette méthodologie.

Les **axiomes** servent ensuite à démontrer de nouveaux énoncés, qui sont alors les **théorèmes** proprement dits. Un **théorème** est donc démontré à partir d'énoncés antérieurs, eux-mêmes démontrés (donc des **théorèmes**) ou admis comme tels (donc des **axiomes**). Un principe fondamental de la méthode axiomatique est qu'un système d'**axiomes** doit être **consistant**. Cela veut dire qu'il ne doit pas conduire à un énoncé (théorème **T**) et à son contraire (**non T**). Autrement dit, si **T** est un **théorème** de la théorie fondée par ce système d'axiomes, **non T** ne doit pas être aussi un théorème de la même théorie. Si cela se produit, alors la théorie est **inconsistante**, et le système d'axiomes doit être revu.

Cela ne veut pas dire que de **T** ou **non T**, l'un est obligatoirement un théorème. En effet, le système d'axiomes peut être tel qu'on ne puisse pas en déduire ni **T** ni **non T**. Dans ce cas, l'énoncé **T** est dit **indécidable** dans la théorie fondée par ce système d'axiomes. Il faut donc un système d'axiomes plus fort, pour une théorie plus forte, afin que **T** puisse éventuellement être **décidable**. Cela veut dire alors que soit **T**, soit **non T**, est un théorème dans le nouveau système. Une théorie dans laquelle tout énoncé est décidable, est dit **complète**. Il est démontré que la Théorie axiomatique des ensembles standard (ZF) est incomplète. Il en est ainsi pour toute théorie suffisamment forte pour contenir les axiomes de l'arithmétique (**théorèmes d'incomplétude de Gödel**).

Le phénomène d'**indécidabilité** et d'**incomplétude** est une autre faiblesse de l'**axiomatique**. Cette méthodologie dans sa philosophie même oblige à séparer le **langage** du **métalangage**, la **théorie** de la **métathéorie**, les notions **formelles** des notions **intuitives**, etc. C'est là la plus grande faiblesse de cette méthodologie, à laquelle entend remédier la **théorématique**.

2- La méthodologie de la Théorématique

a. Le mot CHOSE, le mot clef de la Théorématique

En résumé et conclusion, la nouvelle méthodologie scientifique qu'est la **théorématique** consiste donc d'abord à se donner un mot clef, qui doit être le **nom commun** le plus général qui soit, le plus universel qui soit, le nom commun par défaut. C'est le rôle que joue dans le langage un mot comme **CHOSE**, en anglais **THING**.

Nous aurait choisir un mot plus technique comme « **objet** » pour servir de mot clef et de **nom commun** le plus général, mais quand nous avons le choix entre un mot du langage courant, que tout le monde utilise et comprend (comme le mot **CHOSE** en français et **THING** en anglais) et un mot « technique » appelé à n'être compris que par les initiés à l'ésotérisme ou au jargon scientifique, nous n'hésitons pas une seule seconde : nous préférons le mot d'usage courant ! L'**Univers**, l'**Existence** et les **choses** sont l'affaire de tous et pas seulement d'initiés…

Notre souci est d'allier la convivialité, l'universalité du langage naturel (le langage courant) avec la rigueur d'un langage scientifique. Il faut définir clairement les choses quand il faut les définir, et ne pas définir celles qui n'ont pas besoin de l'être.

On pourrait par exemple tenter de définir le mot **chose** en disant par exemple : « Une **chose** est tout **ce** dont on parle ». Mais c'est une illusion car le mot « **ce** » mis ici signifie déjà « **chose** ». On a donc dit simplement : « Une **chose** est toute **chose** dont on parle ».

Reconnaissons donc simplement qu'une psyché normale, un langage normal, doit posséder un mot clef de type **CHOSE**, qui est le **nom commun** le plus général, ce qu'une **chose** est avant d'être toute autre **chose** : un **ensemble**, un **nombre**, un **point**, une **particule**, un **atome**, une **molécule**, une **cellule**, un **organisme**, un **humain**, un **animal**, une **plante**, une **montagne**, une **planète**, un **système**, une **galaxie**, un **univers**, un **ange**, un **démon**, **Dieu**, le **Diable**, la **vie**, la **mort**, le **bien**, le **mal**, etc. On parle avant tout donc d'une **chose**, et après tout d'une **chose**, le mot qui sert à désigner tout.

Et par conséquent, le mot choisi pour être le plus général n'a pas besoin d'être définit lui-même, puisque pour définir un mot, pour donner une définition digne de ce nom, il faut utiliser d'autres mots, donc d'autres mots plus généraux, et c'est l'engrenage sans fin. Quand donc on a choisi un mot (peu importe lequel : **objet**, **être**, **entité**, **machin**, **truc**, **bidule**, etc.) pour être le nom commun le plus général, il n'a pas besoin d'être défini, car il l'est déjà d'office : « C'est le nom commun le plus général ».

Dès que l'on a formulé la moindre définition, on a parlé d'une **chose**, même si c'est pour dire : « **La chose qui n'est pas une chose** » ou « **La chose est une NON chose** » ! On a définit une **chose** spéciale, qui a cette propriété. Après, le reste est le problème de la **Négation**, du mot **NON**, ce qui est une autre question, une **chose** que la **Science de toutes les choses** qui commence ainsi va devoir éclaircir. Face aux paradoxes de la théorie des ensembles, on a tout accusé sauf la vraie coupable, à savoir la Négation, comme nous allons le voir par la suite. La **Négation** est la cause de tous les paradoxes, cette notion nécessite une très grande révision pour que nous puissions enfin nous ouvrir les portes de la compréhension de l'**Univers**, portes fermées jusqu'ici par la **Négation**.

b. La notion universelle d'ensemble et la définition de l'Univers TOTAL

Désormais, la lettre **X** est un **mot à part entière** pour dire « **chose** ». Quand nous avons besoin d'être concis (comme il se doit en science) nous disons « **x** » pour dire « **chose** », « **les x** » sont « **les choses** ».

Et maintenant aussi, la notion d'**ensemble** et d'**élément** est parfaitement définie à partir du mot clef **chose** : « **Un ensemble est une chose constituée d'autres choses appelées ses éléments.** »

Et par définition, nous appelons l'**Univers TOTAL** la **chose constituée par TOUTES les choses**. L'**Univers TOTAL** et donc l'**Ensemble de toutes les choses**, l'**Ensemble** qui a **TOUTES les choses** comme **éléments**.

Pour dire cela nous avons utilisé le **quantificateur universel**, le mot « **TOUT** » (« $\forall$ »), qui à lui seul est synonyme du mot « **Univers** », « **Le TOUT** ». Dans la méthode **axiomatique**, il nous a beaucoup servi (avec le **quantificateur existentiel**), à écrire des formules, les énoncés du calcul des prédicats. Dans la nouvelle méthode, la théorématique basée sur l mot chose, c'est fini, toutes ces affres du passé sont terminées, les choses sont infiniment plus simples ! Le **quantificateur universel**, le mot « **TOUT** », joue enfin son vrai rôle, il accomplit sa vraie mission, servir à définir l'**Univers TOTAL**.

Et même, quand on a dit « **Univers** », on n'a en principe plus besoin de préciser « **TOTAL** », mais malheureusement, cette précision s'avère nécessaire pour au moins deux raisons : la première est que l'on nous fait prendre sur Terre **NOTRE univers** pour l'**Univers TOTAL**, la **Réalité TOTALE**, dont la définition scientifique est l'**Ensemble de TOUTES les choses**. Rien ne nous autorise à dire que l'**univers connu**, l'**univers observable**, est un tel **Ensemble de TOUTES les choses** ! Rien ne nous autorise à dire que la **Réalité TOTALE** se réduit à la réalité que nous pouvons connaître, observer par nos instruments, mesurer, etc. Il faut maintenant une approche globale, TOTALE des choses.

Et la seconde raison qui justifie la précision « **TOTAL** » est que si l'on demande à n'importe qui de donner la définition de l'**Univers**, la probabilité est assez grande d'entendre une réponse du genre : « **C'est l'ensemble de toutes les choses qui existent** » ou : « **C'est l'ensemble de tout ce qui existe** », au lieu de dire simplement : « **C'est l'ensemble de toutes les choses** » ou « **C'est le tout** ». La nuance est très importante cat dire : **C'est l'ensemble de toutes les choses qui existent** » présuppose déjà que **certaines choses n'existent pas**. Certaines choses ne feraient dont pas partie de l'**Univers**, du **TOUT**, voilà donc la subtilité, l'un de ces innombrables pièges perfides tendus par la **Négation**.

Pour tuer ces pièges dans l'œuf, il faut donner à l'**Univers** la définition qui s'impose : « **L'Ensemble de TOUTES les choses** » et distinguer cette bonne conception de l'**Univers** avec celle qui consiste à concevoir que certaines choses n'existeraient pas dans l'**Univers**. Un **Univers** qui dans ce cas n'est pas **TOTAL** comme celui que nous définissons, il n'est pas le grand **TOUT**, la pleine expression du **quantificateur universel**.

c. La notion absolue d'existence et le Théorème de l'Existence

Voyons maintenant justement comment le **quantificateur existentiel**, l'expression « **IL EXISTE** » (« $\exists$ »), clarifie scientifiquement la notion d'**existence**.

Etant donné un ensemble **E**, l'expression, $\exists X(X \in E)$ se lit : « **Il existe une chose X telle que X est un élément de E** ». Autrement dit simplement : « **Au moins une chose est un élément de E** ». Et être un **élément de E ensemble**, c'est la simple définition de l'**existence dans E**. Plus simplement encore : « **Exister dans E** c'est simplement être un **élément de E**, une **chose de E** ». La notion d'existence est maintenant aussi simple que cela, elle est clarifiée scientifiquement.

Et maintenant, l'**Univers TOTAL** est l'**Ensemble de toutes les choses** donc l'**Ensemble dans lequel TOUTES les choses existent**. Autrement dit, **EXISTER** de manière absolue, c'est être un élément de l'**Univers TOTAL**, l'**Ensemble de toutes les choses**, ce qui est le cas de **toute chose**, par définition même de l'**Univers TOTAL**.

L'énoncé : « **Toute chose existe dans l'Univers TOTAL** » ou « **Toute chose existe dans l'Ensemble de toute choses** », est le **Théorème de l'Existence**. Il découle de la simple définition de l'**Univers TOTAL**. Pour cette raison, l'**Univers TOTAL** est encore appelé l'**Existence**, et la **Science de l'Univers TOTAL** est aussi appelée la **Science de l'Existence**.

2004, la Théorématique

II - La Logique Alternative, la Logique Cyclique, la Logique de l'Univers TOTAL

1. L'Univers TOTAL, le Cycle, l'Alpha et l'Oméga, l'Ordinal, l'Ordinateur, le Générateur de toutes les choses !

a. La notion de Cycle, le secret même de l'Univers TOTAL

Le moment est enfin venu de comprendre profondément le Problème de la Négation, le problème des paradigmes des sciences actuelles, « ce qui **ne tourne pas rond** » (c'est le cas de la dire) et donc ce qu'il faut faire pour tout tourne bien rond à partir de maintenant.

En posant plus haut les bases de la **Théorématique**, en redémarrant toute la Science avec le mot clef universel **CHOSE**, en définissant correctement les notions d'**ensemble** et d'**existence**, en définissant l'**Univers TOTAL** (l'**Ensemble de toutes les choses**) à la fois comme l'**Objet** même de la Science, comme le **Paradigme** et le **Fondement** même de la Science, comme le **Cadre absolu** dans lequel toute la Science doit se faire et dans lequel les choses doivent être étudiées (toutes sans maintenant aucune exception, donc la question de Dieu par exemple), nous avons déjà fait ce qu'il faut pour que la Science tourne bien rond !

Et maintenant, il faut comprendre **pourquoi elle tourne rond**, avec quelle Logique la Science doit maintenant fonctionner. Et cette Logique est tout simplement… la Logique de **Cycle**, oui de **Cercle** ! Avouons qu'il est plus difficile de trouver un objet qui tourne plus rond qu'un **Cercle**, qu'un **Disque**, qu'une **Sphère**, etc.

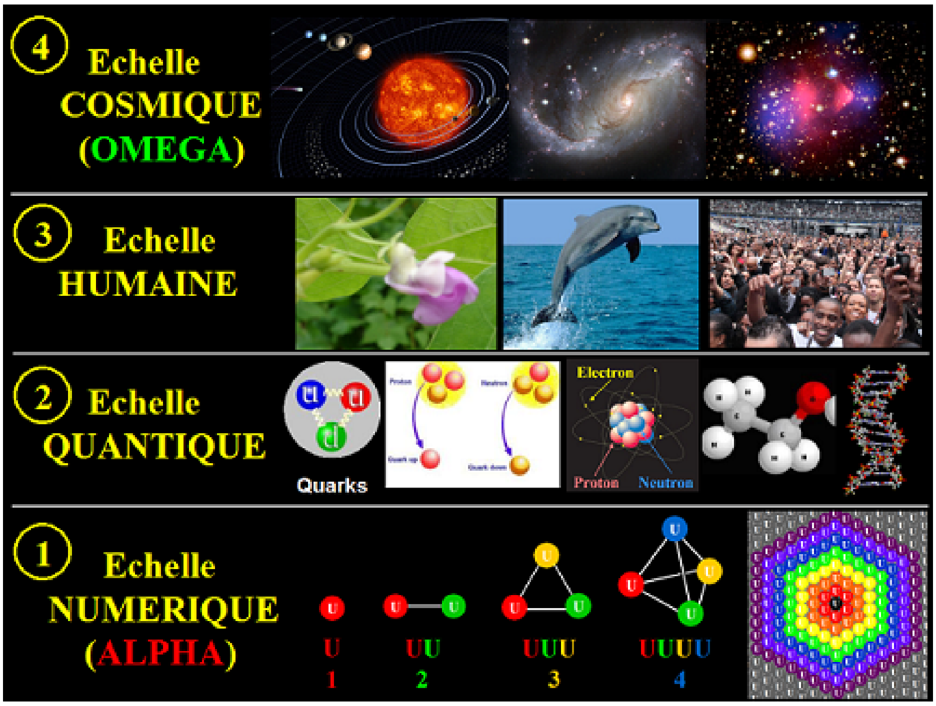
Tout objet qui possède deux propriétés, l'une appelée son **Commencement** ou son **Alpha**, et l'autre appelée sa **Fin** ou son **Oméga**, et qui est tel que le **Commencement** rejoint la **Fin**, bref, tel que l'**Alpha** est aussi l'**Oméga** (Révélation ou Apocalypse 1 : 8 ; 21 : 6 ; 22 : 13 ; la Bible) , est par définition ce que nous désignons par le terme général de **Cycle**.

La journée est un cycle de 24 heures, à 24H ou à minuit on revient à 0H, et ce cycle s'exprime par l'équivalence : **0H = 24H** ou simplement : **0 = 24**.
De même la semaine est un cycle de 7 jours :

Si l'on appelle le Lundi le jour **1**, alors le Dimanche est le jour **0**. et alors le dimanche suivant sera le jour **7**, et ce cycle s'exprime par l'équivalence : **0 = 7**.

Et en partant d'un Samedi (le Samedi 3 par exemple), on a bouclé le cycle de la semaine avec le samedi suivant (le Samedi 10) par exemple. Et on a toujours le même **cycle 7** en écrivant la chaîne d'équivalences :
3 = 10 = 17 = 24 = ….

b. L'Univers TOTAL, l'Infiniment Petit et l'Infiniment Grand, l'Ensemble Vide (l'Alpha) qui construit toutes les choses par Itération. La pleine compréhension du sens de l'Axiome de Fondation.



Les échelles de la Réalité, de l'Infiniment Petit (l'Alpha) à l'Infiniment Grand (l'Oméga).
*L'Univers TOTAL, **U**, est l'Ensemble de toutes les choses,*
l'Ensemble constitué par toutes les choses (l'Oméga),
et il est aussi l'Elément de toutes les choses (l'Alpha),
l'Unique élément qui constitué toutes les choses par simple itération de lui-même :
U, UU, UUU, UUUU, UUUUU, UUUUUU, UUUUUUU, …
*Dans la **Théorie des Univers**, nous avons vu comment l'**Axiome de Fondation**,*
qui veut dire simplement que tous les ensembles sont construits
*à partir d'un seul ensemble, l'**Ensemble Vide** (∅),*
*qui est le **premier ordinal**, celui qu'on appelle le **Zéro** ou **0**.*
*C'est maintenant que l'on comprend le sens même de cet **Axiome de Fondation**,*
*à savoir que l'**Univers TOTAL**, **U**, est l'unique chose*
qui construit, engendre, génère, crée toutes les choses.
*Le mode de construction est l'**Itération**,*
*c'est-à-dire le fait de **répéter toujours la même chose**.*
*C'est cela aussi la définition du **Cycle** !*
*Oui, un **Cycle** est la **réplétion** ou l'**itération** d'un même phénomène, d'une même chose.*

Les rotations, les vibrations, les phénomènes périodiques (qui se définissent par une période et une fréquence, comme par exemple le courant alternatif), les ondes (sonores, électromagnétiques), etc., c'est une affaire de **cycles**. Le Cycle est donc la Logique même de l'Univers, sans le Cycle (si l'on ne voit pas l'Univers en terme de Cycle, l'Univers en tant que le grand Alpha et le grand Oméga), on ne comprend rien à l'Univers !
Si l'on fait la Relativité, la Cosmologie, l'Astrophysique ou la Mécanique Quantique, si l'on parle de l'Infiniment Petit et de l'Infiniment Grand de l'autre, mais que l'on ne voit pas que l'Infiniment Petit (l'Alpha)

et de l'Infiniment Grand (l'Oméga) se rejoignent, si l'on voit donc pas le Cycle de l'Univers TOTAL, alors on est complètement aveugle, on fait des sciences aveugles, qui savent tout sauf le Principal !

Voici l'une des plus grandes vérités à laquelle la Théorie des Univers a conduit :
*Toute chose dans l'Univers TOTAL est fondamentalement de l'**information pure**,*
*constitués d'une seule information élémentaire, l'information **Alpha**, le **U** ou le **0**,*
*qui est donc ce qui est appelé l'**Ensemble Vide** en théorie des ensembles.*
*Un « **Vide** » qui n'est donc pas le **Vide absolu** des paradigmes actuels,*
*mais le **Vide** qui est aussi le **Un** (ou **Quelque Chose**), le **Vide** qui est même le **Plein**,*
*l'**Ensemble Vide** (∅) qui est aussi l'**Ensemble Plein** (**Ω**),*
*le **Rien** qui est aussi le **Tout**, le **Néant** qui est aussi l'**Univers TOTAL**,*
*le **Premier Ordinal** qui est aussi le **Dernier Ordinal**, le **Zéro** qui est aussi l'**Infini**,*
*bref l'**Alpha** qui est aussi l'**Oméga** !*
*Mais le **Vide absolu** est synonyme de **Négation absolue**, de **Négation** du **Cycle**,*
*de **Négation** de l'égalité **0 = 1** (le **Cycle 1**) ou **0 = ω** (le **Cycle Oméga**),*
*de **Négation** de l'égalité entre l'**Alpha** et l'**Oméga**, le **Premier Ordinal** et le **Dernier Ordinal**.*
*Or c'est avec cette **Équivalence**, ce **Cycle**,*
*que toutes les lumières de l'**Univers TOTAL** s'allument enfin pour nous !*
*Nous comprenons que l'**Alpha** engendre toutes les choses par simple **Itération***
*jusqu'à la dernière chose, l'**Oméga**, qui n'est autre que l'**Alpha** lui-même.*
L'Itération fondamentale qui engendre toutes les choses est donc :
U, UU, UUU, UUUU, UUUUU, UUUUUU, UUUUUUU, …
*c'est-à-dire dire donc : **0, 00, 000, 0000, 00000, 000000, 0000000, …**.*
*C'est tout simplement cela que nous appelons les **ordinaux** ou les **nombres** :*
***0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …**.*
*Toutes les choses de l'**Univers**, oui de l'**Univers TOTAL**,*
sont donc les choses que nous appelons les nombres ou les ordinaux.
*L'**Univers TOTAL** est donc le **Grand Ordinal** et le **Grand Ordinateur**,*
*le **Grand Processeur** dont l'activité consiste fondamentalement à dire :*
U, UU, UUU, UUUU, UUUUU, UUUUUU, UUUUUUU, …
*c'est-à-dire dire donc : **0, 00, 000, 0000, 00000, 000000, 0000000, …**,*
*ou encore : **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, …**.*

Et voila donc toute la lumière sur l'**Univers et les choses** ! Tout est fondamentalement numérique, tout est à la bases une affaire d'**ordinaux**, tous les **ensembles**, toutes les **choses** sont donc … des **ordinaux** ! On s'est donc compliqué inutilement la vie en ne travaillant pas dans les bons paradigmes (l'**Équivalence**, le **Cycle**, l'**Alternation**, bref l**'Univers TOTAL**), les paradigmes où toutes les choses s'unifient en une seule chose : l'**Univers TOTAL**, où toutes les notions sont fondamentalement une seule notion, que nous appelons les **générescences** ou les **informations unaires**, c'est-à-dire les informations constituées d'une **seule information de base**, l'**Alpha**, l'**Ensemble Vide** (∅), le **Premier Ordinal**, le **Zéro** (**0**) , qui est aussi l'**Oméga**, l'**Ensemble Plein** (**Ω**), le **Premier Ordinal**, l'**Infini** (**ω**).

Comme on le fait dans les paradigmes actuels (et comme je l'ai fait dans la Théorie des Univers vue dans les parties A et B), on s'est compliqué la vie avec la **Négation** qui sépare tout, qui fait séparer inutilement les porcs et les cochons, les ensembles et les collections, les ensembles et les ordinaux, les ordinaux et les cardinaux, les cardinaux (ou ordinaux) finis et les cardinaux (ou ordinaux) infinis, etc., alors que toutes ces notions ne sont que différentes manières de parler des mêmes choses, d'une seule et même chose : l'**Univers TOTAL**, l'**Ensemble de toutes les choses**, l'**Ensemble de tous les ensembles**!

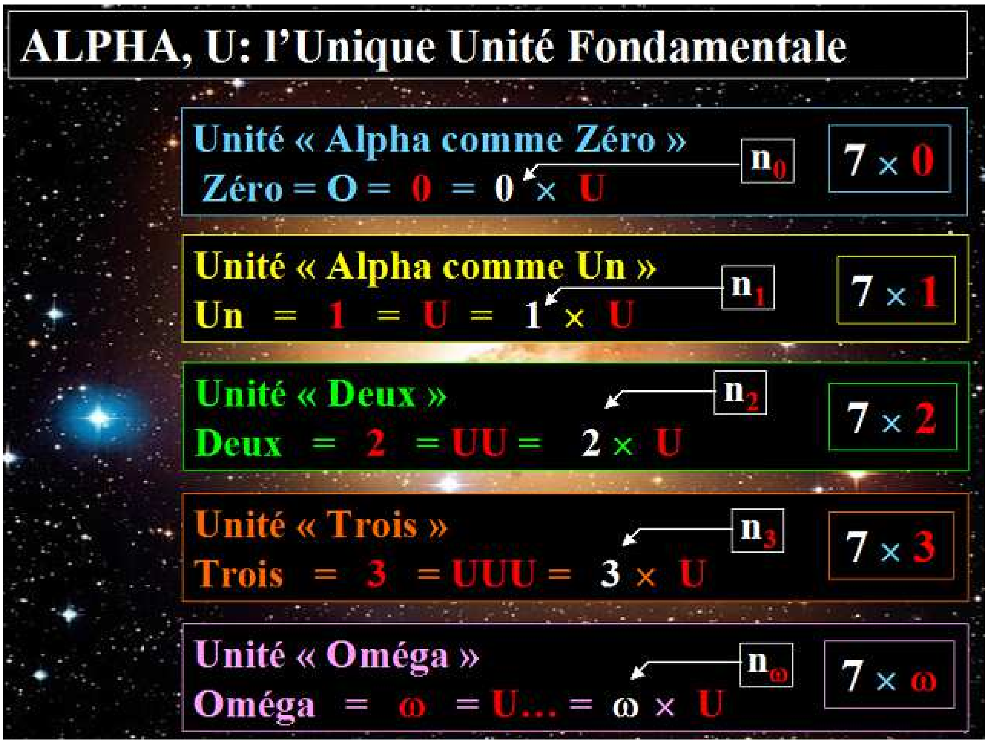
Comme on vient donc de le voir, tout est une simple affaire d'**Itération** de l'**Univers TOTAL**, l'**Alpha** et l'**Oméga** : **U, UU, UUU, UUUU, UUUUU, UUUUUU, UUUUUUU, …**
c'est-à-dire dire donc : **0, 00, 000, 0000, 00000, 000000, 0000000, …**,
ou encore : **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, …**.

Tout est donc fondamentalement numérique, nous sommes dans un système de **numération unaire**, où tous les nombres s'écrivent avec un seul chiffre de base, qui est donc le **0** ! Le système de numération **unaire** est peu considéré actuellement, car ce n'est pas le système le plus pratique pour écrire les nombres. En effet, cela revient à écrire les nombres comme le début de la numération romaine : **I, II, III, …**, donc à tracer un trait pour dire « **Un** », deux traits pour dire « **Deux** », trois traits pour dire « **Trois** », etc. Et donc il faudrait tracer un milliard de traits pour dire « **Un Milliard** » ! Ce n'est donc pas pratique pour écrire les nombres et pour calculer.

Mais le but du système **unaire** et son intérêt n'est pas d'écrire les nombres et de calculer avec eux, mais de **comprendre les nombres**, de **comprendre ce qu'ils sont fondamentalement**, de comprendre l'**Univers**, oui l'**Univers TOTAL** ! Les nombres, les ordinaux, sont des **informations unaires**, des **générescences**, et les nombres sont **TOUTES les choses**, oui **TOUT** ! L'**Univers TOTAL**, le grand **TOUT**, est l'**Alpha** et l'**Oméga**, le **premier** et le **dernier ordinal**, il est chacun d'eux, puisque chacun d'eux est construit par simple **itération** de l'**Univers TOTAL**. L'**Alpha** est le **Vide**, le **Zéro**, donc tout est **itération** du « **Vide** », du « **Zéro** », tout est fondamentalement la même chose, le « **Zéro** », parce que tout est construit à partir de lui. C'est ce que l'on a nommé l'**Axiome de Fondation** dans la théorie des ensembles, à savoir que tous les ensembles sont construits à partir du seul **Ensemble Vide** (∅). Toute la **hiérarchie des ensembles** est ainsi construite (voir la **collection universelle V** dans le développement de la Théorie des Univers et toute la thématique des **branches** et **arbres de fondation**).

Les **ordinaux** (à commencer par **0**) servent à construire toute cette **hiérarchie des ensembles**, qui est aussi en fait toute l'**hiérarchie des ordinaux** (quand on définit maintenant les ordinaux dans le paradigme de l'**Equivalence** et du **Cycle**, leur paradigme normal, naturel) , et même plus toute l'**hiérarchie des choses** de l'**Univers TOTAL**, tous les **ensembles** au sens le plus **physique** du terme, car les **ensembles mathématiques** sont aussi les **ensembles physiques** et les **nombres mathématiques** sont aussi les **nombres de la physique** ! Ce sont les paradigmes de la **Négation**, grande championne de l'**Univers** pour séparer les **porcs** et les **cochons**, qui faisait qu'on s éparait les domaines, les nombres, les ensembles, les unités, alors que partout on parlait des mêmes choses, des mêmes ensembles, des mêmes nombres, des mêmes unités !

Par exemple, ce qu'à notre échelle nous appelons la **seconde** (unité de **temps**), le **mètre** (unité de **longueur**), le **kilogramme** (unité de **masse**), le **coulomb** (unité de **charge électrique**), le **kelvin** (unité de **température**), etc., c'est tout simplement un certain nombre, généralement colossal, si grand qu'il est inutile de le compter ou de vouloir l'écrire. Alors on l'appelle simplement par exemple le **mètre** (qui est fait d'une infinité de **points** de l'espace, donc d'une infinité de **Zéros**, d'**Alphas**), et on calcule avec le **mètre** (symbole **m**) en disant :
$\mathbf{m + m = 1m\ +\ 1m\ =\ 2m}$,
$\mathbf{2m + 3m = 5m}$,
$\mathbf{m \times m = m^2}$,
$\mathbf{m^2 \times m = m^3}$,
etc.



De même aussi pour les nombres appelés la **seconde** (symbole **s**), le **kilogramme** (symbole **kg**), qui sont de très grands nombres, un très grand nombre d'unités **Alpha** ou **Zéros**. Ensuite, on divise le **mètre** par la **seconde** pour avoir l'unité de **vitesse** (**m/s**), on multiplie le **kilogramme** par le carré de l'unité de vitesse pour avoir l'unité d'**énergie** (le **Joule** ou **J**), etc.

Habituellement, quand on dit par exemple **7J** (ou **7 joules**) on qualifie le nombre **7** de « nombre sans dimension » (ce qui veut dire un nombre mathématique pur n'ayant « aucun sens physique ») et **7J** ou **J** de « nombre avec dimension » (ou nombre ayant une signification physique). Mais c'est une erreur, car en fait tous les nombres sont mathématiques et sont physiques. La seule différence entre les deux c'est que les nombres de la physiques sont infinis ou suffisamment grands pour qu'on ne les perçoive plus comme des nombres mathématiques mais comme des objets physiques.

Pour comprendre cela, c'est comme le fait de dire que dans « **7 milliards** » le nombre « **7** » est « sans dimension » tandis que « **7 milliards** » ou « **milliard** » est un nombre « avec dimension ». Mais les deux sont fondamentalement mathématiques, sauf que quand les nombres deviennent de plus en plus grands (comme ici « **milliard** »), on les exprime de plus en plus comme des unités physiques et de moins en moins comme des unités mathématiques.

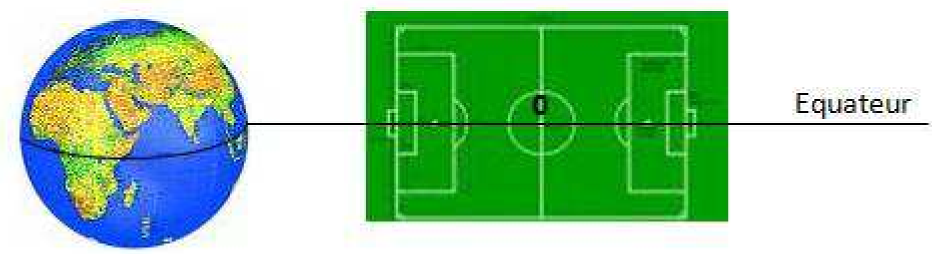
Autre exemple : nous pouvons avoir un objet informatique comme un logiciel, un film, une donnée, etc. Nous savons par exemple qu'il s'agit d'un objet numérique, un nombre écrit avec des **0** et des **1** dans l'informatique binaire. Mais on s'intéresse rarement au nombre qu'est l'objet, quand on regarde par exemple une vidéo ou quand on écoute un morceau mp3, on ne s'intéresse pas au nombre réel que l'objet est, car c'est en général un très grand nombre, mathématiquement parlant. Mais on commence plutôt à voir l'objet comme un objet physique et c'est ainsi qu'on le décrira et le mesurera. On dira par exemple qu'il « pèse » « **7 Gigaoctets** » ou « **7 Go** », ce qui n'est plus l'information ou l'objet numérique en lui-même mais la quantité d'information qu'il est.
« **7 Go** », c'est exactement comme dire « **7 kg** ».

C'est ainsi que tout est fondamentalement informatique dans l'**Univers TOTAL**. Les « petites informations », les « petits nombres », nous les ressentons dans notre mental comme tels, comme des objets « abstraits », comme juste des « informations ». Mais pour les plus grandes informations (infinies ou infiniment grandes) nous les ressentons différemment, comme des longueurs, des masses, des temps, des températures, etc.

Nous sommes donc fondamentalement dans une **Informatique Unaire**, une informatique ou l'information est codée avec un seule information élémentaire, **U** ou **0**. Et comme tout revient à répéter ce seul chiffre, cette seule information (**UUUUUUU…** ou **0000000…**) , nous sommes donc aussi fondamentalement dans un **Cycle 1**, qui consiste à ajouter à chaque fois une seule **unité**, à **incrémenter d'une unité**.

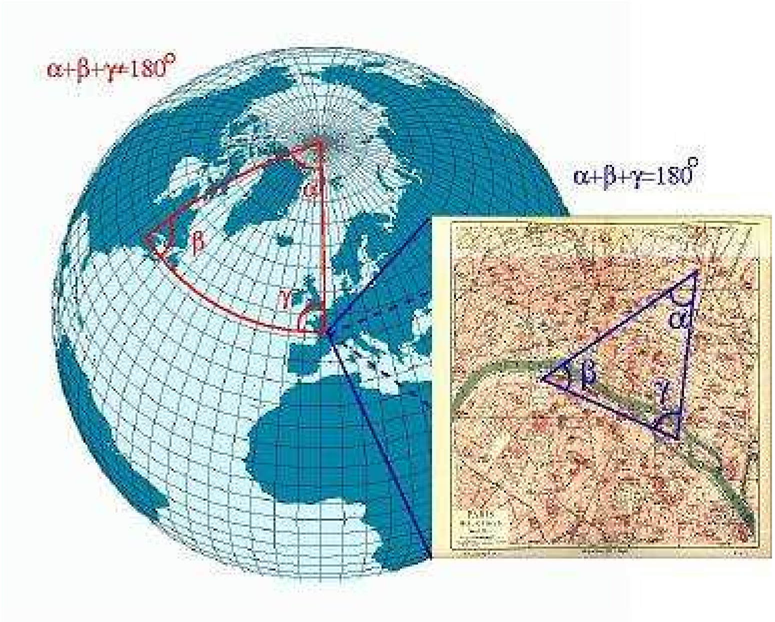
2. De l'ontologie de l'Identité à l'ontologie de l'Equivalence, de la Logique de Droite à la Logique de Cycle, de la Négation l'Alternation

a. De la vérité scientifique qui est comme « La terre est plate » À la vérité scientifique qui est comme « La terre est ronde », des sciences de Négation à la Science de l'Alternation.



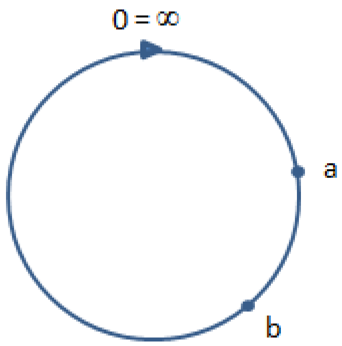
Les terriens ont commencé par dire : « Le Terre est plate », jusqu'au jour où ils sont compris que la Terre est ronde, et depuis, ils disent que la seule vérité est : « La Terre est ronde ». Mais la vérité consiste à dire : « La Terre est plate à l'échelle d'un terrain de football, mais elle est ronde à grande échelle ».

L'Univers TOTAL est l'Ensemble de toutes les choses, l'Ensemble dans lequel toute chose existe, et le contraire de toute chose aussi, l'ensemble dans lequel toute chose est vraie et le contraire de toute chose aussi. **L'erreur, la vraie, le vrai paradoxe**, c'est de **nier cette vérité-là concernant l'Univers TOTAL**, à savoir que tout y est vrai et le contraire de tout aussi, parce qu'il est l'Univers TOTAL. C'est le Problème de la **Négation**.



Les humains ont commencé par dire que la somme des angles d'un triangle est toujours de 180° degré, jusqu'au jour où ils ont découvert que cette somme aussi peut être différente de 180°. Mais ils n'ont toujours pas compris que dans l'Univers TOTAL, tout est vrai et le contraire de tout aussi, et qu'il ne faut nier aucune vérité dans l'absolu, c'est-à-dire donc à l'échelle de l'Univers TOTAL, et que c'est cette **Négation** la seule **Erreur** dans l'**Univers**, le vrai **Paradoxe**.

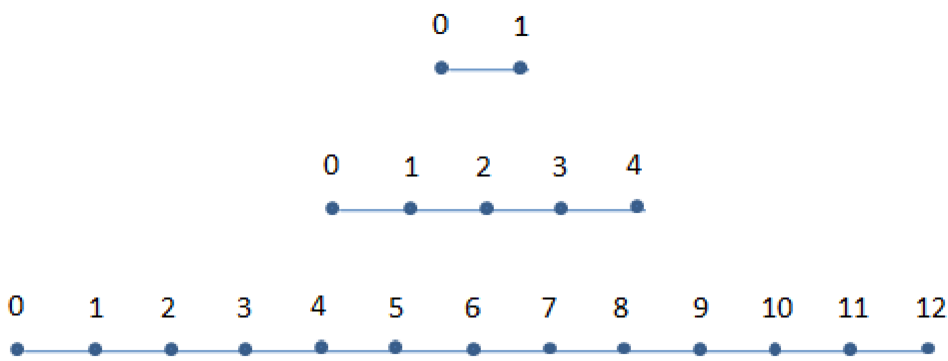
Sur une Droite, comme dans la situation que montre ce schéma, la seule vérité mathématique, scientifique, est que **b** > **a**. Autrement dit, les deux phrases contraires **a** > **b** et **b** > **a** ne peuvent pas être vraies en même temps sur cette Droite. Donc voir la vérité uniquement sur cette Droite, comme ne voir la Terre que sur un terrain de football ou ne raisonner qu'en géométrie euclidienne. On a l'une des vérités possible dans l'Univers, mais on ne voit qu'une. Mais il faut raisonner dans une logique supérieure, la Logique de Cercle ou de Cycle, où l'on voit toutes les vérités, les vérités et leurs contraires.



Sur un Cercle, on a les deux vérités possibles. On a **b** > **a** car on voit que **b** est en avance par rapport à **a**, mais attention, cette fois-ci, contrairement à la Droite, **a** > **b** est vrai aussi, car, malgré les apparences, **a** peut avoir un tour d'avance sur **b**, il peut s'être retrouvé derrière **b** parce qu'il a déjà fait un tour complet, alors que **b** n'a pas encore fait son tour.

b. De la science avec la Règle à la Science faite avec le Compas, de la Science de la Droite à la Science du Cycle, de la Science Plate à la Science Ronde !

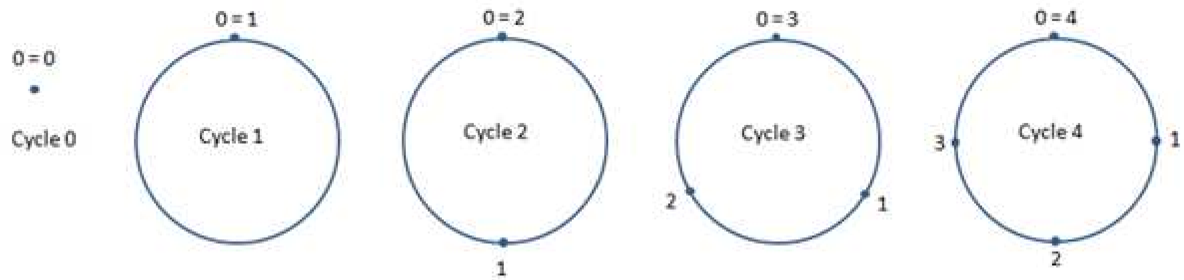
La conception actuelle de l'Egalité est l'Identité, l'Egalité du type « **X = X** » : « 0 = 0 », « 1 = 1 », « 2 = 2 », « 3 = 3», « 4 = 4», « 5 = 5 », etc. Cette Egalité est comme le fait de raisonner sur une Droite, les nombres sont conçus comme des segments, dont les deux extrémités ne se rejoignent pas pour devenir le même point, le même objet, la même chose :

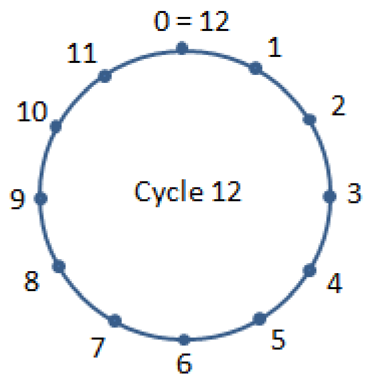


Dans la logique traditionnelle, l'Egalité « **0 = 1** » est fausse, et des deux énoncés « **0 = 1** » et « **0 ≠ 1** », seule la seconde est vraie, elle seule est la vérité scientifique. Dans les mathématiques faites avec l'Identité, on dit seulement « **2 + 2 = 4** » mais pas « **2 + 2 = 5** »., qui revient à dire « **0 = 1** ».

Mais l'égalité « **0 = 1** » est une Equivalence, elle obéit la Logique de Cycle. Si je dis « **2 + 2 = 5** », ou « **0 + 0 = 1** », ce n'est plus une identité, car elle n'est plus une égalité de la forme « **X = X**» mais une égalité bien plus générale et plus puissante, de la forme « **X = Y** ». Au sens de l'**identité** (qui est la conception actuelle de l'égalité), on dira que « **4 = 5** » est faux, et on écrira « **4 ≠ 5** », alors que c'est vrai au sens de l'**équivalence**.

Voilà donc toute l'importance de la nouvelle conception de l'égalité, à savoir l'**équivalence**, qui est tout simplement l'égalité associée au **Cercle** ou au **Cycle** : « 0 = 0 », « 0 = 1 », , « 0 = 2 », « 0 = 3», « 0 = 4», « 0 = 5 », etc., l'égalité des nombres entiers conçus cette fois-ci comme des cercles, dont les deux extrémités se rejoignent maintenant pour devenir le même point, le même objet, la même chose :





On fonctionne actuellement avec l'Identité et on voit l'Equivalence simplement comme une généralisation de l'« égalité », alors qu'en fait c'est l'inverse qu'il faut faire : l'égalité est l'équivalence, on doit fonctionner et raisonner en termes d'équivalence, et voir l'identité comme un cas particulier d'équivalence. En effet, on voit bien avec cette illustration des nombres entiers conçus comme des cercles, que qui dit Equivalence, dit aussi forcément l'Identité « 0 = 0 » ou Cycle 0, qui en est un cas particulier.

« *Il est impossible qu'un même attribut appartienne et n'appartienne pas en même temps et sous le même rapport à une même chose* », dit Aristote (Métaphysique, 1005 b 19-20). C'est le fameux **principe de non-contradiction**.

Comme déjà dit dans un commentaire dans la Théorie des Univers (l'ancêtre de la Théorie universelle des ensembles ou Science de l'Univers TOTAL), c'est très exact, cher Aristote, mais à condition que la **Négation** contenue dans le mot « **impossible** » ou dans la partie de la phrase « ***n'appartienne pas*** » ne soit pas **absolue** mais juste **relative**, ou que l'**Egalité** ou l'**Ontologie** associée au mot « **même** » ne soit pas l'**Identité** mais l'**Equivalence**. Sinon, le fameux « principe de non-contradiction » est en fait le principe même de la **Négation**, oui de la **Négation Absolue**!

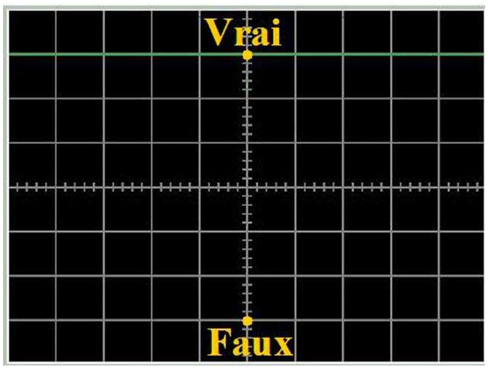
La Logique classique héritée d'Aristote ne supporte pas qu'une chose soit vraie en même temps que son contraire. Elle appelle cela une « contradiction ». C'est pour cela que cette logique est très peu appropriée pour faire la science et comprendre l'Univers, car dans l'Univers une chose peut être vraie ainsi que son contraire sans pour autant qu'il y ait forcément une contradiction. Une même chose peut présenter des aspects contraires. Et l'Univers TOTAL est justement la chose qui présente tous les aspects et leurs contraires, car tout y est vrai et le contraire aussi.

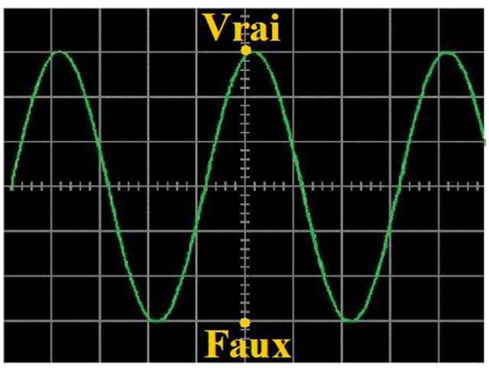
C'est pourquoi quand la théorie des ensembles est faite avec la logique classique et qu'elle se trouve en présence d'ensembles spéciaux comme par exemple « L'ensemble de tous les ensembles » (qui n'est qu'une autre façon de parler de l'Univers TOTAL l'Ensemble de toutes les choses), elle déclare paradoxaux ces ensembles alors qu'en réalité le vrai paradoxe vient de cette logique elle-même.

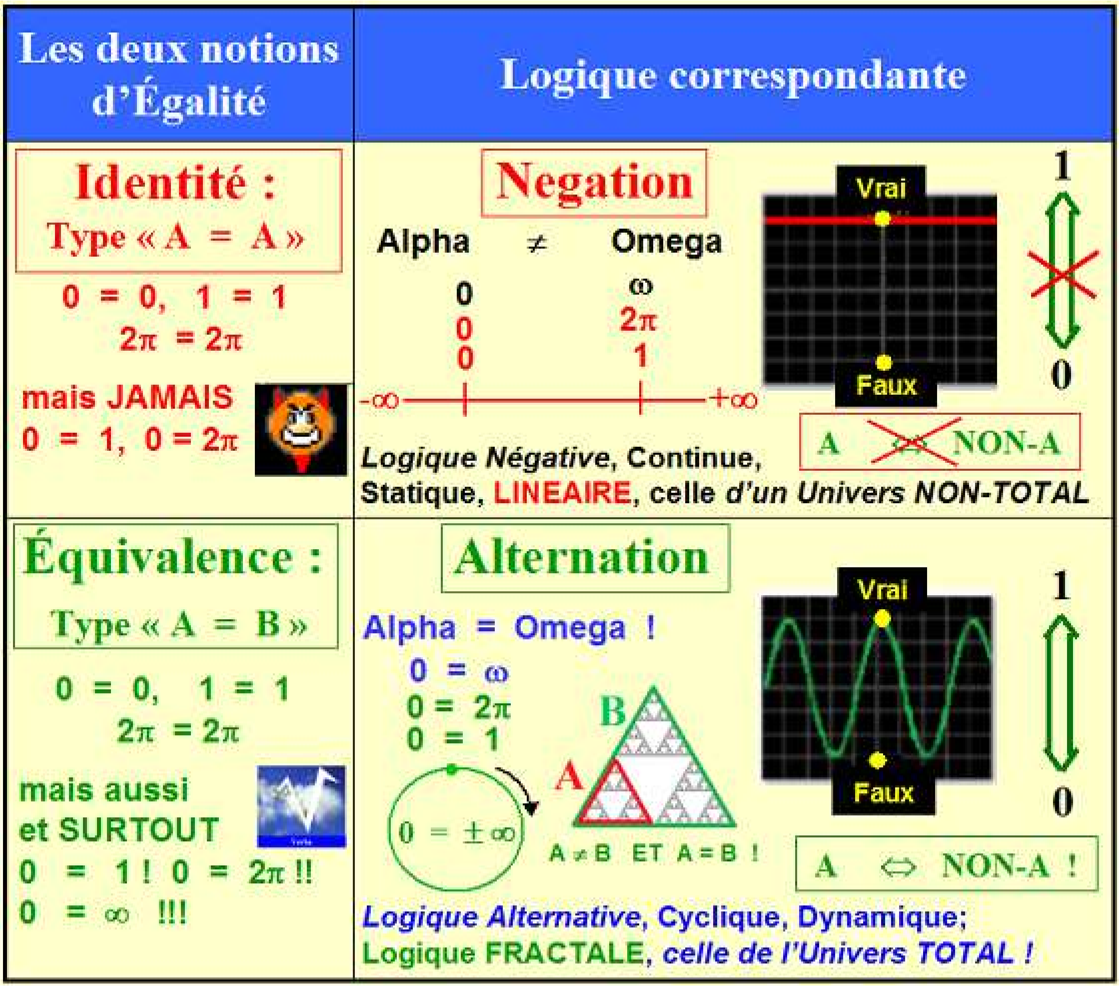
3. De l'ontologie de l'Identité à l'ontologie de l'Equivalence, de la Logique de Droite à la Logique de Cycle, de la Négation l'Alternation

a. La Logique d'Alternation, la Logique Alternative, la Logique des Alternatives

Le connecteur associé à l'Equivalence et au Cycle n'est plus l'actuelle connecteur de **Négation**, **NON**, mais le connecteur d'**Alternation** ou **ALTER**, le connecteur de la Logique Alternative.







La Logique Alternative est comme le **courant alternatif**, elle est pour le **courant alternatif** ce que la **Négation** est pour le **courant continu**, elle est pour le Cercle ou le Cycle ce que la Négation est pour la Droite, elle est pour l'**Equivalence** (égalité nouvelle de type « **0 = 1** » ou « **X = Y** ») ce que la **Négation** est pour l'**Identité** (égalité classique de type « **0 = 0** » ou « **X = X** »), etc.. Et évidement, la **Logique Alternative** est alternative, parce qu'elle… l'alternative à la **Négation**, à la **Logique Négative**. C'est en **Logique Alternative** qu'il faut maintenant raisonner pour comprendre l'Univers TOTAL, l'Ensemble de toutes les choses, l'Ensemble dans lequel toutes choses existe, est vrai, et le contraire de toute chose aussi. L'Etre même qui possède tous les attributs et en même temps aussi les contraires des mêmes attributs !

Il faut maintenant passer de l'actuelle ontologie de l'**Identité** et de la **Négation** à la nouvelle ontologie de l'**Equivalence** et de l'**Alternation**, le paradigme du **Cycle** et de la **Structure FRACTALE**.

b. Toute la Lumière sur la Négation, l'Usurpatrice, le Paradoxe la Falsificatrice de la Science, la cause de tous les problèmes du Monde

Dans l'introduction de ce livre, dans l'analyse que j'ai faite sur les paradoxes de Russell et de Burali-Forti (les pseudo-paradoxes de la théorie des ensembles mais vrai Problème de Négation qui est le vrai Paradoxe), j'ai dit une chose qui est peut-être passée inaperçue, je n'ai pas voulu détailler l'idée à cet endroit, et je vais le faire maintenant.
J'ai dit : « $\alpha \in \alpha$ » et son **contraire** « $\alpha \notin \alpha$ ».
On remarquera donc que je n'ai pas dit comme maintenant : « $\alpha \in \alpha$ » et sa **négation** « $\alpha \notin \alpha$ ».
De même, je dirai : la phrase « **Il pleut** » et son **contraire** « **Il ne pleut pas** »,
et non pas : « **Il pleut** » et sa **négation** « **Il ne pleut pas** ».

Ces phrases ne se **nient** pas, elles sont juste **contraires**, elles sont **deux alternatives**, elles sont deux vérités **contraires** dans l'**Univers TOTAL**. Tantôt « **Il pleut** » ici, et tantôt « **Il ne pleut pas** » ici.

Et pendant qu'« **Il pleut** » ici, à un **autre** endroit de l'**Univers TOTAL**, « **Il ne pleut pas** », et vice-versa. La **Pluie** est le **Beau Temps** sont juste deux situations **contraires** dans l'**Univers TOTAL**, Ces deux choses ne se nient pas, elles sont juste deux **réalités contraires**, car dans l'**Univers TOTAL**, toutes réalités existent, il y a par exemple des esprits qui **nient l'Univers TOTAL** auquel ils appartiennent (ce qui est un **paradoxe**, le **vrai paradoxe**, qui existe aussi dans l'**Univers TOTAL**, la preuve…) et d'autres esprits comme moi qui **affirment l'Univers TOTAL**.

NIER une vérité, une réalité de l'**Univers TOTAL**, jusqu'à l'**Univers TOTAL** lui-même qui est la **Réalité TOTAL**, c'est une chose, et cela s'appelle la **Négation** et même du **Négationnisme**, mais raisonner simplement et présenter les **réalités** et les **réalités contraires sans nier aucune**, c'est une toute autre affaire ! Là, ce que l'on fait s'appelle l'**Alternation**, la **Logique Alternative**, on dit toute la vérité de l'**Univers**, on fait la science qui parle de toute la **Réalité**.

Il ne faut donc plus confondre le **contraire** d'un énoncé ou d'une chose, qui est un **autre** énoncé, une **autre** vérité, une **autre** réalité, une **autre** chose, avec la **négation** de cet énoncé, de cette chose. Le **contraire** d'une chose, c'est son **alternative**, dans le cas où l'on raisonne dans une logique à **DEUX alternatives**, appelé **Alternation 2**. Car on peut aussi raisonner dans une logique à **TROIS alternatives**, appelé **Alternation 3** ; ou une logique à **QUATRE alternatives**, appelé **Alternation 4**, etc. Et on peut raisonner dans une logique à **UNE seule alternative**, appelée donc **Alternation 1**. C'est dans ce cas fondamentale que nous sommes avec l'**Univers TOTAL**, qui est l'**Unique Ensemble**, celui dans lequel tout existe et tout se passe. Nous n'avons pas d'autre choix que l'unique choix d'être **dans l'Univers TOTAL**, l'**Ensemble de toutes les choses**, de raisonner et de faire la science avec lui. Vouloir être en dehors de l'**Univers TOTAL**, se constituer en une **alternative séparée** de Lui, le **NIER** donc, c'est cela le **Paradoxe**, le vrai !

Dans une bonne logique (la **Logique Alternative** donc), le **Vrai** et le **Faux** sont juste **deux alternatives**, comme le **0** et le **1** ou le **1** et le **0**, comme **Gauche** et **Droite**, **Haut** et **Bas**, **Ouvert** et **Fermé**, **Pile** et **Face**, etc.
L'**une** ne nie pas l'**autre**, elles sont juste **contraires** c'est tout, l'**une** n'est pas plus vraie que l'**autre**, et l'**une** n'est pas plus fausse que l'**autre**, même si on les appelle « **Vrai** » et « **Faux** » ce qui entraîne la confusion avec le problème de la **Fausseté** ou de la **Négation**, qui est une toute autre affaire, qui veut dire, elle, que l'on **nie la vérité**, on **nie la réalité**, et en particulier on **nie l'Univers TOTAL**!

Ce qui sème aussi la confusion est aussi le couple de mot **Oui** et **Non**, et en particulier la seconde **alternative** nommé **Non** de ce couple. Ce mot **Non**, qui a servi de connecteur de **Négation Absolue**, le connecteur **NON**, a permis à la **Négation** d'usurper l'identité du très normal mot **Non** du couple **(Oui, Non)**, qui signifie simplement qu'on a le choix entre **deux alternatives**, l'une appelée **Oui** et l'autre appelée **Non**, et la seconde sert juste à dire que quand on ne veut pas la première, c'est la deuxième que l'on veut, et vice-versa. La seconde est juste l'**alternative** à la première, à **alterner** la première, à l'**inverser**. Au lieu du couple
(Oui, Non), on n'aurait pu choisir n'importe quel autre couple :
(0, 1), ou **(Pile, Face)**, ou **(A, B)**, ou **(+, -)**, etc.
Ce couple fonctionne selon la bonne vieille Règle des signes, car c'est de cela qu'il s'agit fondamentalement :

X	Oui X
Oui	Oui
Non	Non

Oui Oui = Oui
Oui Non = Non

X	Non X
Oui	Non
Non	Oui

Non Oui = Non
Non Non = Oui

La Table d'Alternation 2 des connecteurs Oui et Non.
*Le connecteur **Non** est à comprendre « L'Autre » ou « L'Autre »,*
et à partir de l'Alternation 3 on dit : « UN Autre ».
*Ce n'est pas une affaire de « Vrai » et « Faux » au sens de la **Négation**,*
*mais juste que **Non** est l'**Alternative** à **Oui**.*
*Ce n'est que quand le **Non** devient l'**Alternative** à l'**Univers TOTAL***
*qu'il devient la **mauvaise alternative**, la **Négation** proprement dite.*
*Il es alors synonyme de **Faux** cette fois-ci au sens **Négatif** du terme..*
*Alors le normal couple **(Oui, Non)** de la table de droite, la table de **Non**,*

*devient le couple (**Vrai**, **Faux**),*
*cette table de **Non** est appelée la « **table de vérité du connecteur Négation** »,*
*sans dire la nature et la définition exacte de la **Négation**,*
*à savoir la **Négation de l'Univers TOTAL** !*
*La **Diablesse Négation** aura ainsi usurpé la **Divine Alternation**,*
*elle aura usurpé l'identité du très normal mot **Non** de l'**Alternation 2***
*(plus exactement ce qui aurait dû se dire **ALTER** se dit **NON**)*
pour paraître un mot normal de la logique et du raisonnement,
pour fausser la science et le monde sans que personne ne se doute de rien !

X	A X
A	A
B	B

A A = A
A B = B

X	B X
A	B
B	A

B A = B
B B = A

La Table d'Alternation 2 des connecteurs A et B,
qui signifie que n'importe quel couple d'objets (A, B) fait l'affaire !
*Le **contraire** de A c'est B et le **contraire** de B c'est A.*
Quand on ne veut pas A on veut B ou vice-versa.

X	+ X
+	+
-	-

+ . + = +
+ . - = -

X	- X
+	-
-	+

- . + = -
- . - = +

La Table d'Alternation 2 des connecteurs «+ » et « - »,
*La **Négation**, la vraie, fonctionne simplement*
comme le signe « - » de la Règle des signes.
*Ici aussi se cache une subtile arnaque de la **Négation** :*
*On a choisi le mot « **Négatif** » pour désigner le signe « - »,*